



**Dinis Miguel Marques Alemão**

Licenciado em Ciências da Engenharia Física

## **Pacote de experiências didáticas utilizando uma placa de aquisição multissensores**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Física**

Orientador: Grégoire Bonfait, Professor Associado com  
Agregação, Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador: Hugo Silva, Chief Innovation Officer  
PLUX - Wireless Biosignals, S.A.,  
IT - Instituto de Telecomunicações

Júri

Presidente: Prof. Dr. André Wemans  
Arguente: Prof. Dr. Ricardo Vigário  
Vogal: Prof. Dr. Grégoire Bonfait



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Novembro, 2020**



## **Pacote de experiências didáticas utilizando uma placa de aquisição multissensores**

Copyright © Dinis Miguel Marques Alemão, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.





## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao Professor Grégoire Bonfait pela ajuda, pela motivação e por toda a disponibilidade que demonstrou no decorrer deste trabalho. O seu conhecimento, a sua exigência, e a sua humildade foram, sem dúvida, fatores importantes para a minha aprendizagem, para o meu empenho e para o meu futuro.

Outra palavra de agradecimento é dirigida ao Professor Hugo Silva pelo auxílio prestado sempre que foi necessário, mesmo numa altura exigente em termos de esforço e de disponibilidade.

À PLUX – Wireless Biosignals agradeço o material disponibilizado, nomeadamente o BITalino R-IoT, e toda a ajuda prestada na resolução de problemas no decurso do projeto.

Agradeço também aos colegas que durante estes cinco anos me ajudaram neste percurso. Espero que a eles tenha retribuído alguma dessa ajuda.

Por fim, o maior agradecimento dirige-se à minha família, por tudo o que representaram e representam para mim.



*We are like butterflies who flutter for a day and think it is  
forever.*

- Carl Sagan, *Cosmos*, 1980



## RESUMO

---

Atualmente, a miniaturização dos equipamentos de aquisição de sinais e a tecnologia de transmissão de sinal sem fios já estão muito desenvolvidos. Neste contexto, é oportuno o estudo, o desenvolvimento e a comercialização de novas experiências didáticas, em particular na área da Física, que aproveitem estas novas tecnologias. Assim, pretendeu-se com este projeto desenvolver um conjunto de experiências didáticas, utilizando a placa de aquisição multissensores BITalino R-IoT, para apoiar ao ensino da Física. Foram desenhadas e testadas cinco experiências em três áreas da Física (Mecânica, Electromagnetismo e Termodinâmica), recorrendo a estes novos sensores miniaturizados de baixo custo e com transmissão de sinais sem fios. Os resultados das experiências no geral foram positivos, verificando a viabilidade da utilização do BITalino R-IoT nesta área.

O projecto foi realizado em colaboração com a empresa PLUX - Wireless Biosignals S.A., que disponibilizou os sistemas de aquisição e transmissão sem fios.

**Palavras-chave:** Sensores Wireless, BITalino R-IoT, Experiências didáticas, Física Clássica, Ensino

---



## ABSTRACT

---

Nowadays, both miniaturization of signal acquisition equipments and wireless signal transmission technology are highly developed. Therefore, it is important to study, develop and commercialize new didactic experiments, particularly in the area of Physics, that take advantage of these new technologies. This project intended to develop a set of didactic experiments, using the BITalino R-IoT multi-sensor acquisition board to support the teaching of Physics. Five experiments were designed and tested in three areas of Physics (Mechanics, Electromagnetism and Thermodynamics), using these new low-cost miniaturized sensors with wireless signal transmission. Overall, the results of the experiments were good, allowing to verify the viability of using BITalino R-IoT in this area.

The project was carried out in collaboration with the company PLUX - Wireless Biosignals S.A., which made the wireless acquisition and transmission systems available.

**Keywords:** Wireless Sensors, BITalino R-IoT, Didactic Experiments, Classical Physics, Education

---





# ÍNDICE

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xix</b>
<b>Siglas</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivações . . . . .	1
1.2 Vantagens . . . . .	2
1.3 Estado da Arte . . . . .	2
1.4 Estrutura do documento . . . . .	4
<b>2 Hardware e Software</b>	<b>5</b>
2.1 BITalino R-IoT . . . . .	5
2.2 OpenSignals . . . . .	6
2.3 Calibração dos Sensores . . . . .	8
2.3.1 Acelerómetro . . . . .	8
2.3.2 Giroscópio . . . . .	10
2.3.3 Magnetómetro . . . . .	11
2.3.4 Sensor de pressão . . . . .	13
<b>3 Experiências</b>	<b>15</b>
3.1 Queda livre com arrasto . . . . .	15
3.1.1 Introdução Teórica . . . . .	15
3.1.2 Procedimento Experimental . . . . .	17
3.1.3 Resultados . . . . .	19
3.1.4 Trabalho do Aluno . . . . .	24
3.2 Colisão Inelástica e Coeficiente de Restituição . . . . .	24
3.2.1 Introdução Teórica . . . . .	25
3.2.2 Procedimento Experimental . . . . .	26
3.2.3 Resultados . . . . .	27
3.2.4 Trabalho do Aluno . . . . .	30
3.3 Momento de Inércia no Plano Inclinado . . . . .	30

3.3.1	Introdução Teórica . . . . .	30
3.3.2	Procedimento Experimental . . . . .	32
3.3.3	Resultados . . . . .	34
3.3.4	Trabalho do Aluno . . . . .	37
3.4	Solenóide Finito . . . . .	37
3.4.1	Introdução Teórica . . . . .	37
3.4.2	Procedimento Experimental . . . . .	39
3.4.3	Resultados . . . . .	42
3.4.4	Trabalho do Aluno . . . . .	44
3.5	Lei dos Gases Ideais . . . . .	45
3.5.1	Introdução Teórica . . . . .	45
3.5.2	Procedimento Experimental . . . . .	46
3.5.3	Resultados . . . . .	47
3.5.4	Trabalho do Aluno . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>51</b>
4.1	Considerações Finais . . . . .	51
4.2	Trabalho Futuro . . . . .	52
	<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	BITalino (r)evolution (versão Plugged). . . . .	3
1.2	Placa de aquisição multissensores PocketLab Voyager com a mala de viagem e o cabo USB. . . . .	3
2.1	Fotografias de topo (a) e de perfil (b) do BITalino R-IoT utilizado neste projeto.	5
2.2	Captura de ecrã do programa <i>OpenSignals (r)evolution</i> , onde cada gráfico se refere a um eixo de um sensor e à direita está aberto o <i>plugin</i> “EXPERIMENTAL PHYSICS”. . . . .	7
2.3	Aceleração em função do tempo, obtida ao rodar lentamente o R-IoT sobre um dos eixos. Os valores máximo e mínimo corresponderão à aceleração gravítica $g$ e a $-g$ . . . . .	8
2.4	Secção do <i>plugin</i> destinada à calibração dos três eixos do acelerómetro. . . .	9
2.5	Resultados obtidos ao lançar verticalmente o R-IoT e consequentemente durante a queda. . . . .	10
2.6	Valores da velocidade angular obtidos para cada eixo do sensor em função das respectivas velocidades angulares dadas pelo gira-discos. . . . .	11
2.7	Secção do <i>plugin</i> destinada à calibração dos três eixos do giroscópio. . . . .	11
2.8	Secção do <i>plugin</i> destinada à calibração do magnetómetro do R-IoT. . . . .	12
2.9	Procedimento efectuado para calibrar o sensor de pressão. . . . .	14
3.1	Queda livre com arrasto: (a) Aceleração; (b) Velocidade; (c) Altura. . . . .	17
3.2	Passos da montagem da proteção no R-IoT. . . . .	17
3.3	Fotografias do local da experiência em estudo. . . . .	18
3.4	Secção do <i>plugin</i> direccionada à experiência da queda livre. . . . .	18
3.5	Esquema representando dois dos três eixos do sensor de aceleração do R-IoT e o vetor de aceleração gravítica $\vec{g}$ relativamente a estes. O vetor $\vec{g}$ faz um ângulo $\theta$ com o eixo $z$ . . . . .	18
3.6	Captura de ecrã dos resultados obtidos para cada eixo do acelerómetro após gravar a experiência no <i>OpenSignals</i> . . . . .	20
3.7	Aceleração do R-IoT durante a queda livre em função do tempo . . . . .	21
3.8	Velocidade do R-IoT durante a queda livre em função do tempo. . . . .	22
3.9	Altura do R-IoT durante a queda livre em função do tempo. . . . .	22

3.10	Aceleração (a azul) obtida na queda livre de cerca de 4 m de duas esferas com características diferentes e respetivo valor teórico (a vermelho), calculado a partir da Eq. 3.11. . . . .	23
3.11	Aceleração (a azul) obtida na queda livre de cerca de 22 m do R-IoT com uma borracha anexada na base deste e curva teórica do conjunto (a vermelho), obtida a partir da Eq. 3.11. . . . .	24
3.12	Altura teórica em função do tempo para uma bola largada de $h_0$ e que colide sucessivamente com o chão. $\Delta t_n$ é o tempo decorrido entre a colisão $n$ e $n + 1$ . . . . .	25
3.13	Captura de ecrã dos resultados obtidos para cada eixo do acelerómetro após gravar a experiência no <i>OpenSignals</i> com: (a) bola de ténis; (b) bola de golfe. . . . .	27
3.14	Resultados experimentais de sucessivas colisões inelásticas com o chão de uma bola de ténis (à esquerda) e de uma bola de golfe (à direita). . . . .	28
3.15	Tempo decorrido entre as colisões $n$ e $n + 1$ , $\Delta t_n$ , em função da colisão $n$ para: (a) bola de ténis; (b) bola de golfe. . . . .	29
3.16	Um cilindro com raio $R$ roda ao longo de um plano inclinado com um ângulo $\theta$ . Sobre o corpo estão aplicadas a força gravítica $\vec{F}_g$ , a força normal $\vec{F}_N$ e a força de atrito estático $\vec{F}_e$ . . . . .	31
3.17	Dois cilindros cheios descem no plano inclinado sem deslizar com velocidades iguais independentemente das suas massas e dos seus raios. . . . .	32
3.18	Fotografias do cilindro utilizado em todos os ensaios estudados nesta secção: (a) Cilindro sem tampa; (b) Cilindro em rotação com o R-IoT anexado à sua tampa. . . . .	33
3.19	Fotografias de diferentes configurações do cilindro representado na Fig. 3.18, de forma a variar a distribuição da massa relativamente ao eixo de rotação. . . . .	33
3.20	Secção do <i>plugin</i> direcionada à experiência do plano inclinado. . . . .	34
3.21	Velocidade em função do tempo para 4 cilindros diferentes a descer num plano inclinado. . . . .	35
3.22	Velocidade de um cilindro cheio com água líquida e de um cilindro cheio com gelo. . . . .	36
3.23	Campo magnético criado num ponto P por uma espira onde circula uma corrente I. . . . .	38
3.24	Solenóide criado por várias espiras de raio $R$ próximas entre si. . . . .	39
3.25	Valor teórico do campo magnético ao longo do eixo de um solenóide finito de comprimento L. . . . .	39
3.26	Fotografia do solenóide usado na experiência. Em baixo está ligado um multímetro com o objetivo de medir a corrente elétrica a circular nas espiras. . . . .	40
3.27	Fotografias do R-IoT em cima de um suporte de cartão movido ao longo do eixo do solenóide. . . . .	40
3.28	Secção do <i>plugin</i> direcionada à experiência do solenóide. . . . .	41

3.29	Valores dos campos magnéticos ao longo do eixo do solenóide em função da distância à extremidade deste, obtidos para três valores diferentes de corrente elétrica no solenóide. . . . .	42
3.30	Representação esquemática dos dois solenóides de comprimento $l$ e raio $r$ a uma distância $d$ . . . . .	43
3.31	Valor do campo magnético teórico em função da posição ao longo do eixo do solenóide assumindo que este é formado por dois solenóides separados com metade do comprimento. . . . .	43
3.32	Erro relativo do valor do campo magnético em função da distância ao longo do eixo do solenóide para os três valores de corrente usados. . . . .	44
3.33	Secção “CUSTOM” do <i>plugin</i> “EXPERIMENTAL PHYSICS”. . . . .	46
3.34	Resultados da lei dos gases ideais: (a) Variação da temperatura; (b) Variação da pressão; (c) Pressão em função da temperatura. . . . .	48



## LISTA DE TABELAS

2.1	Especificações do BITalino R-IoT retiradas de [8]. . . . .	6
3.1	Coeficientes de arrasto ( $C_A$ ) para vários objetos sujeitos a um fluxo de ar (representado por uma seta). Estes valores foram retirados de Hoerner (1965) [26]. . . . .	20
3.2	Valores medidos e calculados das grandezas necessárias ao estudo da experiência do plano inclinado para as quatro configurações cilíndricas usadas. . .	34





## SIGLAS

**ACC** Acelerómetro (Accelerometer).

**CSS** Cascading Style Sheets.

**GYR** Giroscópio (Gyroscope).

**HTML** HyperText Markup Language.

**IMU** Unidade de Medição Inercial (Inertial Measurement Unit).

**MAG** Magnetómetro (Magnetometer).

**MEMS** Sistemas Microeletromecânicos (Micro-Electro-Mechanical Systems).

**PTN** Condições normais de temperatura e pressão.

**R-IoT** Real-time Internet of Things.



## INTRODUÇÃO

### 1.1 Motivações

As experiências continuam a ser uma componente fundamental no ensino da Física, já que estas permitem, entre outras finalidades, melhorar a compreensão por parte do aluno de ideias científicas, estimular e manter o interesse do aluno e promover um método científico de pensamento [1]. Embora estudos sugiram que a realização da componente experimental não implica uma melhoria do desempenho dos alunos em avaliações finais [2], a realização do procedimento experimental e a análise de dados contribuem não só para uma melhor perceção e uma melhoria na capacidade de retenção do tópico em questão [3], como também para o treino nas técnicas de medida. Sendo a Física uma ciência que parte da observação da natureza, torna-se essencial essa observação por meio de experiências e posterior análise e compreensão.

Alguns dos problemas atuais para a integração da componente experimental no ensino são:

- Elevado custo de montagens experimentais, dando como exemplo os materiais adquiridos pelo Departamento de Física da FCT-UNL para os laboratórios de Física I, II e III;
- Necessidade de compatibilidade da marca entre montagem experimental, aparelho de medição e *software* de visualização (se existir), o que não beneficia a flexibilidade na construção dos sistemas;
- Pouca oferta de *kits* experimentais de Física para um nível intermédio ou avançado recorrendo a um aparelho *wireless* com vários sensores incorporados.

A possibilidade de realizar as experiências descritas nesta tese, sem necessitar do material existente num laboratório de ensino e utilizando qualquer montagem experimental (por

exemplo, estudar um sistema físico do quotidiano), foi um incentivo para a realização deste projeto.

### 1.2 Vantagens

A utilização de uma placa de aquisição multissensores sem fios em experiências didáticas na área da Física (Mecânica, Termodinâmica, Electromagnetismo, etc.) traz várias vantagens:

- A ausência de fios em todo o procedimento experimental facilita bastante a realização do mesmo;
- A presença de vários sensores na mesma placa leva à dispensabilidade de outros aparelhos, agregando assim todas as medições no mesmo dispositivo, tornando simultaneamente o local de trabalho mais organizado;
- É mais fácil a deteção de anomalias na experiência facilitando também assim, na vertente educativa, o trabalho do professor.
- Possibilidade da visualização, no computador, em tempo real, do comportamento de todos os sensores intrínsecos à placa;
- Utilizando este dispositivo, não haverá a necessidade da compatibilidade entre a marca do aparato experimental e do sistema de medição como ocorre na maioria dos laboratórios das instituições de ensino. Por exemplo, nos laboratórios de Física I da FCT-UNL estão presentes na sua maioria sistemas físicos, sistemas de medição e software de visualização da PASCO, i.e. se algum dos componentes não for dessa marca, a experiência pode não ser realizável;
- A oferta deste tipo de placas é cada vez maior e o seu preço cada vez mais acessível.

Por estas razões é oportuno o desenvolvimento e a aplicação prática desta placa de aquisição a várias experiências na área da Física.

### 1.3 Estado da Arte

Este trabalho constrói sobre o trabalho realizado pelo antigo aluno de Engenharia Física da FCT-UNL João Alho, descrito na sua dissertação “Development of Didactic Physics Experiments using a Miniaturized Wireless Acquisition Board” [4] e no artigo [5], pelo que algum do trabalho realizado é baseado nos mesmos. Nesse projeto foi utilizada a placa de aquisição BITalino (r)evolution [6] (Fig. 1.1), sendo esta um modelo diferente do BITalino utilizado nesta tese, com maiores dimensões e custo mais elevado (€169). No trabalho anterior, direccionou-se a utilização desta placa para três experiências na área da Física: o pêndulo; a indução de Faraday; e a medição de temperatura. Pretende-se

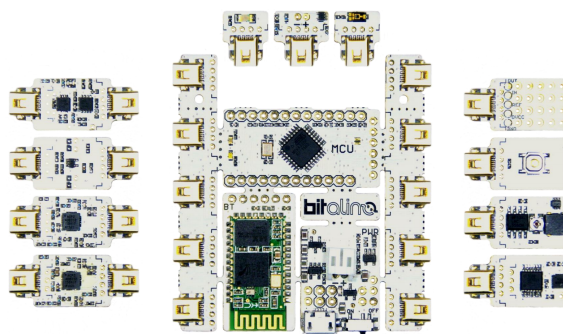


Figura 1.1: BITalino (r)evolution (versão Plugged) retirada de [7].

agora utilizar o modelo BITalino R-IoT [8] numa maior gama de experiências e torná-lo acessível e prático ao utilizador, quer seja de forma académica ou pessoal. A descrição desta placa é feita na Secção 2.1 do Capítulo 2. Alguns produtos *wireless* para a área educativa já começam a ser comercializados (por exemplo pela PASCO [9]) mas apresentam algumas desvantagens, tais como o facto de serem direccionados apenas para um tipo de experiências e terem volume e massa relativamente grandes. Outro exemplo são os produtos PocketLab [10], comercializados pela Myriad Sensors, que também recorrem a dispositivos multissensores *wireless* aplicados a experiências em algumas áreas da ciência. O modelo mais usado na realização de experiências didáticas, e com um propósito semelhante ao objetivo deste projeto, é o PocketLab Voyager, representado na Fig. 1.2 com uma mala de viagem e um cabo USB, apresentando um custo de \$148 [11]. Embora este



Figura 1.2: Placa de aquisição multissensores PocketLab Voyager com a mala de viagem e o cabo USB. Imagem retirada do *website* da PocketLab [11].

produto já existisse aquando do início da elaboração desta tese, pretendeu-se dar continuação ao trabalho realizado pelo João Alho referido anteriormente, verificando desta vez a viabilidade da utilização do modelo R-IoT em experiências didáticas e com o eventual objetivo de comercialização futura.

### 1.4 Estrutura do documento

Neste capítulo são apresentadas as motivações que levaram à realização deste trabalho, as vantagens da utilização de placas de aquisição multissensores sem fios em experiências didáticas na área da Física e uma descrição do estado da arte neste tipo de tecnologia.

No Capítulo 2 são apresentados a placa de aquisição utilizada no projeto, o BITalino R-IoT, referindo as suas características e algumas vantagens, e o *software* disponibilizado pela PLUX, o *OpenSignals*, descrevendo sucintamente a sua interface. São também descritos os procedimentos necessários à calibração de cada sensor do R-IoT.

No Capítulo 3 aborda-se o conteúdo principal deste trabalho: cinco experiências da Física Clássica. Na área da Mecânica, são estudadas as experiências da queda livre com atrito, da colisão inelástica e da rotação de cilindros no plano inclinado. Na área do Eletromagnetismo, é analisado o campo magnético criado por um solenóide ao longo do seu eixo. Por último, na área da Termodinâmica, é estudada a relação entre a pressão e a temperatura de um gás próximo das condições ideais de pressão e temperatura, e com volume e quantidade de matéria constantes.

Finalmente, no Capítulo 4 são referidas considerações finais acerca do trabalho realizado e sugestões para trabalho futuro neste tema.

## HARDWARE E SOFTWARE

## 2.1 BITalino R-IoT

O BITalino R-IoT (desenvolvido originalmente pelo IRCAM [12]) é o mais recente modelo de placa multissensores de aquisição de sinais sem fios comercializado pela PLUX - Wireless Biosignals S.A. [8], uma empresa portuguesa dedicada ao desenvolvimento e comercialização de sistemas de aquisição de biosinais. Este modelo, representado na Fig. 2.1, é especialmente vantajoso devido às suas dimensões reduzidas comparadas às de outros modelos, sendo estas 3,7 cm x 3,4 cm x 1,5 cm (com a bateria incluída), e por ser o modelo com menor custo (€99) relativamente aos restantes modelos da empresa [8]. Outra vantagem em relação aos modelos anteriores é a alteração do tipo de comunicação para Wi-Fi, substituindo assim a ligação *Bluetooth* [6, 13], permitindo, deste modo, aumentar o alcance entre o R-IoT e o computador enquanto é adquirido o sinal.



Figura 2.1: Fotografias de topo (a) e de perfil (b) do BITalino R-IoT utilizado neste projeto. Como escala de comparação está representada uma moeda de €1 retirada do *website* da INCM [14].

Este modelo vem equipado com uma Unidade de Medição Inercial ou IMU (em inglês *Inertial Measurement Unit*) LSM9DS1 ([15]), sendo esta um dispositivo eletrônico composto por três sensores triaxiais que medem a aceleração linear do sensor, recorrendo a um acelerómetro, a velocidade angular, recorrendo a um giroscópio, e o campo magnético recorrendo a um magnetómetro. Tem ainda um sensor de temperatura (que mede a temperatura interna do R-IoT) e duas entradas analógicas. O procedimento recomendado para a calibração destes sensores é apresentado na Secção 2.3. As especificações detalhadas deste modelo foram retiradas do *website* do BITalino [8] e estão descritas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Especificações do BITalino R-IoT retiradas de [8].

Sensores incorporados	Características gerais
1x Acelerómetro Triaxial (ACC); 1x Giroscópio Triaxial (GYR); 1x Magnetómetro Triaxial (MAG).	Portas analógicas: 2; Portas auxiliares: 2 GPIO + I2C; Resolução: 16-bit (por canal da IMU); 12-bit (por porta analógica); Taxa de aquisição: 200Hz; Comunicação: 2.4GHz WiFi; Dimensões: 34x24x3.5mm.
Outras funcionalidades	Acessórios incluídos no kit
Configuração <i>over-the-air</i> via servidor <i>web</i> incorporado; <i>Streaming</i> contínuo via WiFi; Protocolo Open Sound Control (OSC); Computação na placa de quaterniões e ângulos de Euler; Microcontrolador CC3200 80MHz 32-bit ARM (MCU); Programação como Arduino via Energia.	1x Cabo USB; 1x Bateria Li-Po 700mAh.

O manual de utilizador contendo a composição detalhada, as características dos sensores e o procedimento de instalação e configuração do BITalino R-IoT está disponível em [16]. Um guia para a instalação rápida do R-IoT é também disponibilizado pela PLUX em [17], sendo o datasheet deste modelo disponibilizado em [18].

## 2.2 OpenSignals

O *OpenSignals (r)evolution* é um *software* de fácil utilização disponibilizado pela PLUX, capaz de adquirir e visualizar em tempo real os sinais provenientes dos sensores do módulo R-IoT e de outros modelos comercializados pela empresa [19]. Tem disponível no seu ecrã principal, entre outras, as opções de gravação em tempo real, visualização da última gravação e ligação ao módulo R-IoT. Este programa tem ainda a vantagem de ter disponíveis vários *plugins* de análise de dados, tanto em tempo real como após a gravação. Estes módulos abrangem vários tipos de análise como por exemplo Variabilidade da Frequência Cardíaca (HRV), Análise Eletromiográfica (EMG) e Sincronização com Vídeo. Recorrendo ao guia de criação de *plugins* para o *OpenSignals* disponibilizado pela PLUX [20], foi criado um *plugin*, “EXPERIMENTAL PHYSICS”, composto por várias experiências de Física. Na Fig. 2.2 é possível ver no lado direito do programa *OpenSignals* parte da



interface gráfica deste *plugin*, juntamente com os gráficos temporais referentes a cada eixo de cada sensor (A1 a A10) e a janela temporal, com todos os sensores selecionados, na parte inferior.

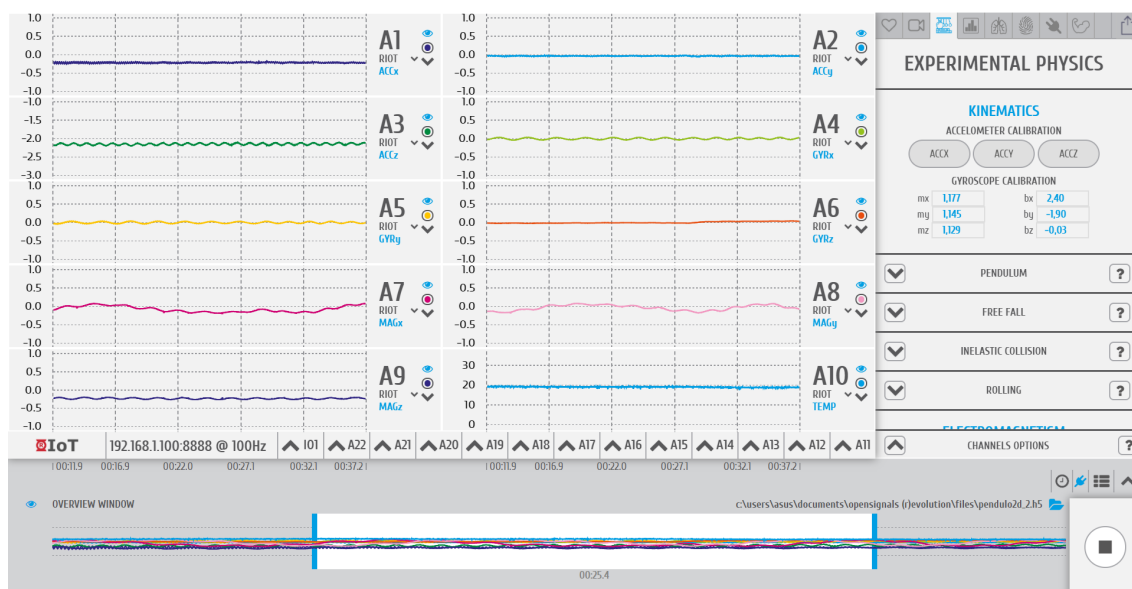


Figura 2.2: Captura de ecrã do programa *OpenSignals (r)evolution*, onde cada gráfico se refere a um eixo de um sensor e à direita está aberto o *plugin* “EXPERIMENTAL PHYSICS”. A parte inferior do ecrã mostra, para o mesmo eixo temporal, as variações de todos os sensores selecionados, permitindo também ajustar a janela de tempo desejada.

Para ter o *plugin* em funcionamento foram criados vários ficheiros de raiz com diferentes linguagens, nomeadamente: HTML, para construir a interface gráfica do *plugin*; CSS, para mudar os estilos de apresentação da interface; JavaScript, para criar as ações ao interagir com a interface gráfica (ex: pressionar num botão); e Python, onde está programado todo o código para ler, editar e processar os dados do modo desejado.

Desta forma tornou-se possível exportar os dados de interesse para a análise de cada experiência em particular e, nalguns casos, observar resultados ou gráficos no próprio *plugin*, facilitando assim o trabalho do utilizador, já que os dados serão tratados e apresentados posteriormente de uma forma mais direcionada. Ainda assim, não será feita toda a análise relativa a cada experiência mas sim a mais básica (i.e. apresentação apenas do sinal dos sensores necessários à experiência, calibração destes sensores, junção de vários ficheiros numa só folha de cálculo em certas experiências para facilitar a leitura, etc.), tornando desta forma a parte de tratamento de dados mais pedagógica para o aluno/utilizador. As secções criadas para cada tipo de experiência vão sendo descritas ao longo do Capítulo 3, nas subsecções referentes ao procedimento experimental. Tanto o programa como o manual de utilizador do *OpenSignals* estão disponíveis no *website* da PLUX [19].

## 2.3 Calibração dos Sensores

Os sensores integrados na IMU são sistemas eletromecânicos na escala do micrómetro (em inglês *micro-electro-mechanical systems* ou MEMS), pelo que as suas calibrações deverão ser feitas regularmente, de modo a obter resultados válidos. Mais concretamente, em relação ao magnetómetro, a sua calibração deverá ser realizada a cada ensaio. De seguida, apresentam-se os procedimentos necessários à calibração de cada sensor da IMU, e ainda de um sensor de pressão adquirido separadamente e lido por uma das portas analógicas do R-IoT.

### 2.3.1 Acelerómetro

O acelerómetro mede o valor da aceleração linear em cada um dos três eixos ortogonais. Este valor será proporcional à soma de todas as forças a atuar em cada eixo do sensor, medindo o deslocamento de uma massa pertencente a cada um destes, pelo que é também medida a aceleração provocada pela força gravítica. Assim, mesmo que o sensor esteja em repouso, este medirá um valor de aceleração igual à aceleração gravítica  $g$ . Se por outro lado o sensor estiver em movimento de queda (sem atrito) a aceleração medida de todos os eixos será nula.

Com o objetivo de calibrar este sensor será necessário registar os valores máximo e mínimo de aceleração detetados para cada eixo resultantes apenas da força gravítica. Estes valores corresponderão assim a  $g$  e  $-g$ . Deste modo, ao fazer rodar o R-IoT sobre cada eixo a uma velocidade reduzida, de forma a evitar criar acelerações provenientes dessa rotação, obter-se-ão um máximo e um mínimo de aceleração. Ao gravar três ficheiros no *OpenSignals* onde se realiza este procedimento para cada eixo, o gráfico da aceleração em função do tempo para cada um terá um aspeto semelhante ao da Fig. 2.3. Nesta

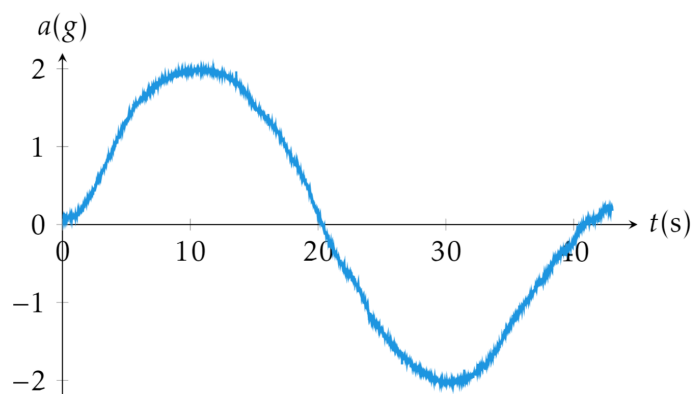


Figura 2.3: Aceleração em função do tempo, obtida ao rodar lentamente o R-IoT sobre um dos eixos. Os valores máximo e mínimo corresponderão à aceleração gravítica  $g$  e a  $-g$ .

figura, os valores de aceleração apresentados estão bastante descalibrados, daí o sinal variar entre  $-2g$  e  $2g$ . De forma a suavizar o sinal obtido pelo acelerómetro, é aplicado um filtro de média móvel, recorrendo ao módulo de processamento de sinal escrito em

*Python* “biosppy.signals.tools” [21], com um tamanho de subsequência de cem pontos e utilizando um kernel “boxzen”. Os valores máximo ( $C_{Max}$ ) e mínimo ( $C_{Min}$ ) presentes na Fig. 2.3 são então calculados pelo *plugin* para cada eixo, e correspondem ao valor da aceleração gravítica e ao seu simétrico, ou seja, ocorrem quando o eixo do sensor está na vertical. Assim, de forma a calibrar os dados adquiridos para cada eixo, o *plugin* irá aplicar o seguinte cálculo, com base nestes dois valores e no valor medido ( $ACC$ ):

$$a = \frac{ACC - \frac{C_{Max} + C_{Min}}{2}}{C_{Max} - C_{Min}} \cdot 2g \quad (2.1)$$

Este cálculo resume-se a retirar aos valores medidos a média entre o máximo e o mínimo (centrar em torno de zero) e a garantir que o alcance devido à gravidade é de  $2g$ . Esta expressão pode ser transformada em:

$$a = \frac{ACC - C_{Min}}{C_{Max} - C_{Min}} \cdot 2g - 1 \quad (2.2)$$

Obtêm-se assim os valores calibrados da aceleração para cada eixo nas unidades SI, já que é utilizado  $g = 9,80655 \text{ ms}^{-2}$ .

Assim, e de forma a analisar os dados de uma dada experiência, o utilizador deve inserir os ficheiros referentes à calibração (previamente gravados) no *plugin*, carregando no botão relativo a cada eixo, como está representado na Fig. 2.4.

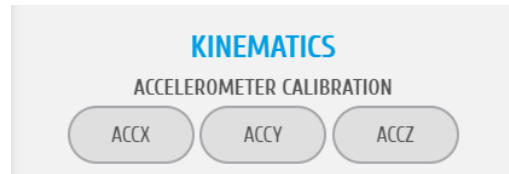


Figura 2.4: Secção do *plugin* destinada à calibração dos três eixos do acelerómetro.

De seguida mostra-se como podem ser utilizados e trabalhados os dados adquiridos pelo acelerómetro. Ao lançar o R-IoT verticalmente no sentido ascendente, mantendo uma posição horizontal, e deixando-o cair no chão enquanto o sinal era adquirido, foram obtidos os valores da aceleração nos três eixos representados no gráfico da Fig. 2.5a (em que foram subtraídos os *offsets* provenientes da força gravítica para, deste modo, quando estiver em repouso, haver aceleração nula). Estando na horizontal, é o eixo  $z$  que terá a maior contribuição para a aceleração durante o movimento. Isto é visível na mesma figura, em que o valor da aceleração em  $z$  é representado a amarelo, e, após ser lançado (aproximadamente entre os 0,50 s e os 0,75 s, acompanhado pelo crescimento rápido da aceleração, consequência do movimento ascendente rápido da mão), decresce abruptamente até cerca de  $-10 \text{ ms}^{-2}$  (aproximadamente  $-g$ ), embatendo no chão aos 2 s. É possível obter a velocidade e o deslocamento a partir das definições de aceleração e de velocidade,

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.3)$$

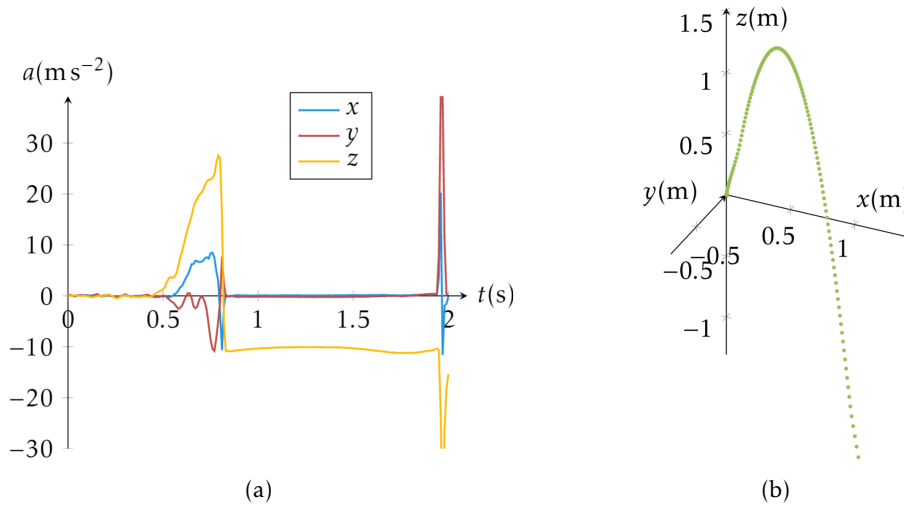


Figura 2.5: Resultados obtidos ao lançar verticalmente o R-IoT e consequentemente durante a queda. (a) Sinal adquirido pelo acelerómetro para cada eixo; (b) Representação gráfica da dupla integração dos valores da aceleração para cada eixo, obtendo assim a posição do R-IoT no espaço (assumindo que não roda durante o movimento).

sendo  $t$  o tempo,  $a_x$  a componente da aceleração do corpo no eixo  $x$ ,  $v_x$  a velocidade e  $x$  o deslocamento relativos a esse eixo. Para isso, ao integrar uma vez os dados da aceleração em ordem ao tempo (recorrendo a um método de integração numérica como o método trapezoidal) obtém-se a velocidade do corpo, e ao integrar duas vezes em ordem ao tempo obtém-se o deslocamento do mesmo. A Fig. 2.5b mostra os resultados da dupla integração (ou seja os resultados do deslocamento do corpo) em que existem três coordenadas espaciais, relativas aos três eixos do sensor.

Este exemplo mostra como é possível a partir deste sensor calcular velocidades e deslocamentos com base na integração da aceleração, apesar de poder, em certos casos, originar erros provenientes da dupla integração do ruído intrínseco.

### 2.3.2 Giroscópio

Um giroscópio mede a velocidade angular em torno de cada eixo do sensor. Para efectuar a calibração do giroscópio recorreu-se a um gira-discos com três velocidades bem definidas (33 rpm, 45 rpm e 78 rpm). Após a gravação de três ficheiros em que se colocou o R-IoT parado no gira-discos e a rodar com as velocidades 45 rpm e 78 rpm, orientado alternadamente para cada um dos três eixos, foi feito um ajuste linear aos pontos obtidos relativamente aos valores de velocidade angular indicados no gira-discos (Fig. 2.6). As retas obtidas pelo ajuste linear e representadas a tracejado na Fig. 2.6 têm os seguintes coeficientes, em que  $m$  representa o declive, e  $b$  a ordenada na origem:

$$\begin{aligned} m_x &= 1,1772; b_x = 2,40^\circ/\text{s} \\ m_y &= 1,1450; b_y = -1,90^\circ/\text{s} \\ m_z &= 1,1292; b_z = -0,03^\circ/\text{s} \end{aligned} \tag{2.4}$$

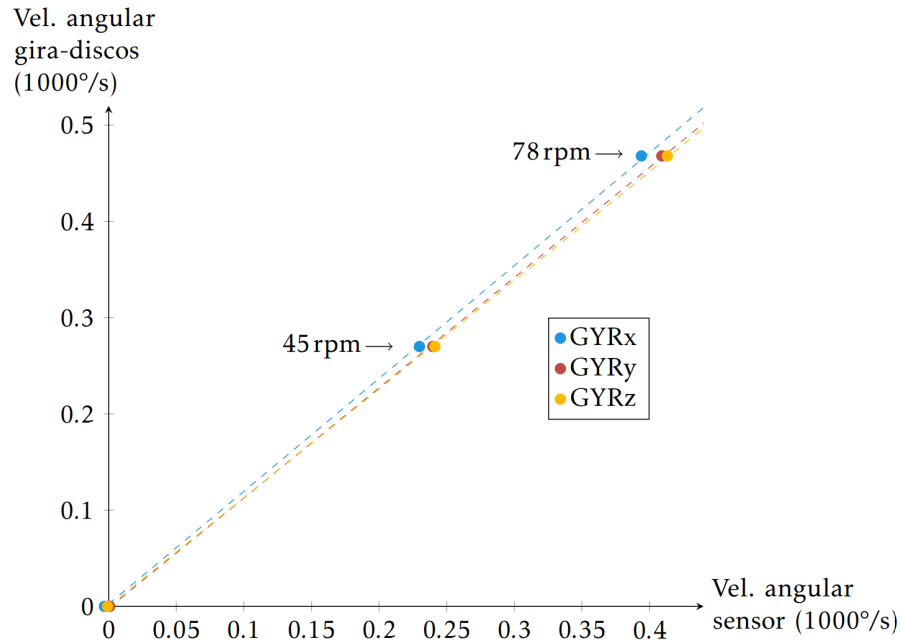


Figura 2.6: Valores da velocidade angular obtidos para cada eixo do sensor em função das respectivas velocidades angulares dadas pelo gira-discos. Estão presentes três pontos para cada eixo que se referem ao repouso, a 45 rpm e a 78 rpm. As retas a tracejado foram obtidas recorrendo ao método dos mínimos quadrados.

Após este ajuste, podem então ser inseridos na secção da calibração do giroscópio no *plugin* os coeficientes obtidos na Eq. 2.4 (ver Fig. 2.7) para, deste modo, serem apresentados valores já calibrados.

GYROSCOPE CALIBRATION			
mx	1,117	bx	2,40
my	1,145	by	-1,90
mz	1,129	bz	-0,03

Figura 2.7: Secção do *plugin* destinada à calibração dos três eixos do giroscópio.

Analogamente ao raciocínio presente na Subsecção 2.3.1, a partir destes dados é possível obter a variação do ângulo integrando numericamente os dados do giroscópio, já que

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.5)$$

sendo  $\omega$  a componente da velocidade angular num eixo e  $\theta$  o ângulo relativo a esse eixo. Verificou-se ao longo de vários testes que os resultados dessa integração eram precisos e válidos face à real variação do ângulo.

### 2.3.3 Magnetómetro

A presença de materiais magnéticos duros e macios (*hard and soft magnetic materials*) perto de magnetómetros são uma causa comum para a origem de erros nos valores

medidos por estes. Os primeiros, sendo materiais ferromagnéticos que criam um campo magnético constante e não sendo facilmente desmagnetizáveis, são responsáveis por acrescentar um valor constante ao campo magnético medido, sendo por isso facilmente corrigidos durante a calibração. Os segundos, por outro lado, são materiais ferromagnéticos facilmente magnetizáveis por uma pequena variação no campo magnético e não são tão facilmente corrigidos.

A resposta ideal, no espaço a três dimensões, de um magnetómetro triaxial quando exposto a um campo magnético constante (por exemplo o campo terrestre) e rodado sobre si próprio é uma superfície esférica de raio igual ao módulo desse campo magnético e centrada na origem do referencial. Isto porque, idealmente, todos os eixos medirão um valor máximo igual ao valor absoluto do campo (quando perfeitamente alinhados com este), e um mínimo simétrico a este valor; e o módulo das três componentes dará sempre o valor do campo, formando assim a superfície esférica. Os efeitos provocados pelos materiais mencionados anteriormente a esta resposta ideal serão o desvio em relação à origem da superfície esférica (*hard magnetic materials*) e a deformação desta superfície em elipsóides (*soft magnetic materials*). Um método de calibração que tem como objetivo eliminar estes dois tipos de erro dos dados, e que apresenta bons resultados, é descrito por Kris Winer [22], tendo sido implementado no *plugin* criado. Para além desta calibração, é também apresentada no *plugin* uma caixa (Fig. 2.8) para a introdução do valor do campo magnético total terrestre (em Gauss ( $=10^4$  Tesla)) no local onde for realizada a experiência, podendo este ser obtido no *website* [23] da *National Centers for Environmental Information* (NCEI).

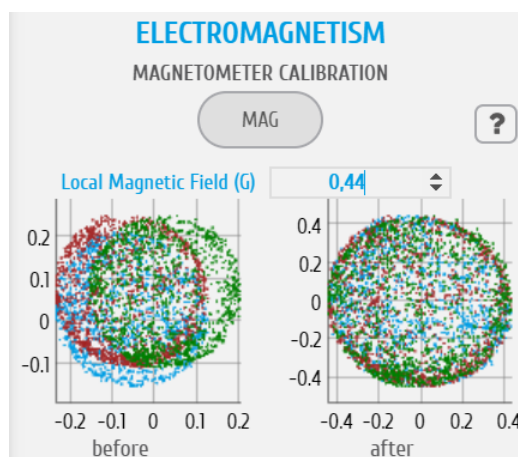


Figura 2.8: Secção do *plugin* destinada à calibração do magnetómetro do R-IoT. Ao inserir o valor do campo magnético local e o ficheiro relativo à calibração, surgirão duas imagens que mostram o efeito do processo de calibração utilizado pelo algoritmo criado para o *plugin*.

O processo para realizar a calibração do magnetómetro deve começar pela gravação de um ficheiro onde o R-IoT é rodado várias vezes pelos três eixos de modo a abranger o maior número de direções possíveis (cerca de 1 minuto a rodar é suficiente). Depois de se realizar a experiência pretendida, deve ser inserido o valor do campo magnético terrestre

local. Depois, ao carregar no botão MAG (ver Fig. 2.8) e escolher o ficheiro relativo à calibração, aparecerão dois gráficos em que cada cor se refere à dependência de cada dois eixos (isto porque o *software* não permite a apresentação de gráficos com três dimensões), e onde o da esquerda representará os valores antes da calibração e o da direita os valores depois da calibração. Estes gráficos também podem ser logo visualizados após a gravação do ficheiro de calibração, de modo a verificar se existe algum problema na calibração.

Enquanto que com três dimensões esperar-se-ia uma superfície esférica após a calibração, numa representação a duas dimensões são esperados três círculos concêntricos na origem e de raio igual ao campo magnético inserido. É possível verificar que após a calibração os valores de cada eixo em função de outro ficam centrados em zero e formam um círculo de raio 0,44 que foi o valor inserido no *plugin*. Desta forma, não existirá um offset em nenhum dos eixos nem nenhuma deformação proveniente de algum material magnético ou de algum campo magnético parasita interno ao sensor.

#### 2.3.4 Sensor de pressão

Foi necessário recorrer a um sensor de pressão externo de modo a realizar experiências que envolvessem medições de pressão (ver Secção 3.5). Após ter sido ligado ao R-IoT e se adquirirem dados relativos a várias experiências, verificou-se que os valores obtidos no *software* não estavam de acordo com as especificações no *datasheet*. Uma possível razão é a conversão incorreta do sinal analógico do sensor para digital na placa do R-IoT. Com esta limitação, os valores de pressão medidos não seriam os corretos. Como tal, procedeu-se à sua calibração recorrendo a uma bomba de vácuo ligada ao interior de uma campânula e a um medidor de pressão analógico. Ao baixar a pressão no interior da campânula, com o R-IoT no seu interior, a pressão desceu rapidamente, como pode ser observado na Fig. 2.9a. A partir desse momento foram sendo registados vários valores da pressão que o medidor indicava para o respetivo instante, enquanto era adquirido simultaneamente o sinal pelo sensor ligado ao R-IoT (representado no gráfico em unidades ADU - *Analog Digital Unit*). Esses valores de pressão foram então comparados com os valores de saída digital do R-IoT e marcados no gráfico da Fig. 2.9b. O ajuste linear dos pontos a vermelho será a reta de calibração dos valores de saída. De modo a comparar com as indicações do *datasheet*, está também presente nesse gráfico, a amarelo, a função transferência desse sensor. Era então fundamental efectuar a calibração deste sinal já que as retas têm parâmetros bastante diferentes.

Para além de ser fundamental a realização destas calibrações de forma a obter resultados válidos das várias grandezas medidas, estas permitem também ao utilizador familiarizar-se com as funcionalidades do R-IoT e do *OpenSignals*. Além disso, são igualmente formativas, já que, ao serem realizadas, pode ser adquirido um conhecimento adicional acerca do funcionamento de cada sensor e das suas capacidades e limitações.

No próximo capítulo serão analisadas diversas experiências na área da Física Clássica, onde, para além de ser apresentada uma breve introdução teórica acerca de cada uma, é

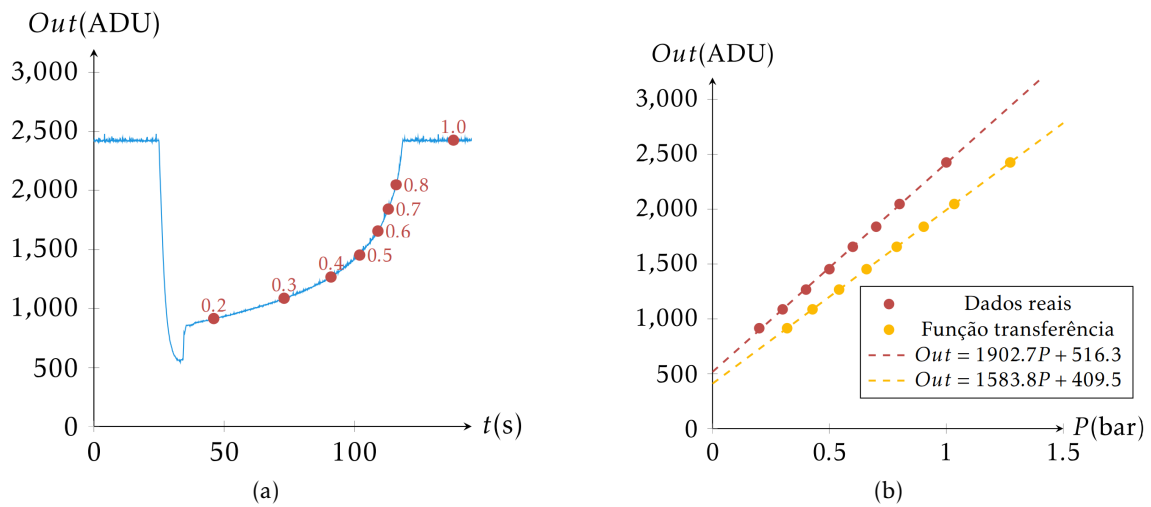


Figura 2.9: Procedimento efectuado para calibrar o sensor de pressão: (a) Variação da pressão absoluta medida pelo sensor ao longo do tempo (em *Analog Digital Units*), com os valores em bar da pressão de referência a vermelho; (b) Comparação entre a reta de calibração obtida (a vermelho) e a reta da função transferência retirada do *datasheet* do sensor [24].

também referido o procedimento necessário à sua realização e à sua análise utilizando o *plugin* criado no *OpenSignals*.



## EXPERIÊNCIAS

### 3.1 Queda livre com arrasto

Pretende-se nesta secção estudar o efeito do atrito do ar num corpo em queda livre, verificando, nomeadamente, o anulamento progressivo da aceleração medida do corpo e, consequentemente, a existência da velocidade limite durante a queda, sendo estes fenómenos resultantes do aumento da força de atrito ao longo da queda. Para isso, é analisada a influência da forma, do tamanho e da massa de alguns corpos, onde foi incorporado o R-IoT, na aceleração destes, resultante da força gravítica e da força de atrito do ar (força de arrasto).

Os vários resultados obtidos na Subsecção 3.1.3 são comparados com os valores teóricos deduzidos na Subsecção 3.1.1, e, posteriormente recorre-se a esta comparação para estimar o coeficiente associado à forma de um objeto (coeficiente de arrasto) não tabelado.

#### 3.1.1 Introdução Teórica

Quando um corpo se desloca num fluído fica sujeito a uma força de atrito oposta ao sentido do seu movimento. Caso a velocidade do corpo relativa ao fluído não seja demasiado reduzida (de tal forma que o movimento deste fluído possa ser considerado turbulento), que é caso da queda livre no ar, esta força é proporcional ao quadrado da velocidade, denominando-se força de arrasto ( $F_A$ ). Mais concretamente,

$$F_A = \frac{1}{2} C_A \rho A v^2 \quad (3.1)$$

onde  $C_A$  é o coeficiente de arrasto, associado à forma do corpo e que, nas condições anteriores, terá um valor aproximadamente constante para cada objeto,  $\rho$  é a densidade do fluído (massa volúmica),  $A$  é a área da secção transversal eficaz do objeto e  $v$  é a

velocidade instantânea do mesmo [25]. Partindo da 2ª lei de Newton, tem-se

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A \quad (3.2)$$

onde  $m$  é a massa do corpo,  $t$  o tempo e  $g$  a aceleração gravítica. Substituindo 3.1 em 3.2 e dividindo ambos os membros por  $m$ ,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{C_A \rho A}{2m} v^2 \quad (3.3)$$

Obtém-se assim uma equação diferencial não linear de 1ª ordem, que pode ser transformada em

$$\frac{dv}{g - \frac{C_A \rho A}{2m} v^2} = dt \quad (3.4)$$

Integrando ambos os membros obtém-se:

$$\sqrt{\frac{2m}{g C_A \rho A}} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{C_A \rho A}{2mg}} v \right) = t + c_1 \quad (3.5)$$

que pode ser escrita como

$$\operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{C_A \rho A}{2mg}} v \right) = \sqrt{\frac{g C_A \rho A}{2m}} t + c_2 \quad (3.6)$$

Aplicando a tangente hiperbólica a ambos os membros da Eq. 3.6, esta transforma-se em:

$$\sqrt{\frac{C_A \rho A}{2mg}} v = \tanh \left( \sqrt{\frac{g C_A \rho A}{2m}} t + c_2 \right) \quad (3.7)$$

Resolvendo em ordem à velocidade,

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C_A \rho A}} \tanh \left( \sqrt{\frac{g C_A \rho A}{2m}} t + c_2 \right) \quad (3.8)$$

Como o corpo parte do repouso,  $v(t=0) = 0$  e, conseqüentemente,  $c_2 = 0$ . Obtém-se, desta forma, a equação que descreve a velocidade de queda livre com atrito:

$$v(t) = v_\infty \tanh \frac{gt}{v_\infty} \quad (3.9)$$

onde  $v_\infty$  é a velocidade limite ou terminal (pois  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$ ) e

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{C_A \rho A}} \quad (3.10)$$

De forma a obter a aceleração do corpo,  $a$ , em função do tempo, deriva-se, em ordem ao tempo, ambos os membros da Eq. 3.9, pois  $a(t) = \frac{dv}{dt}$ . Assim,

$$a(t) = g \operatorname{sech}^2 \frac{gt}{v_\infty} \quad (3.11)$$

Como  $v(t) = \frac{dh}{dt}$ , onde  $h$  representa a altura do corpo, ao integrar ambos os membros da Eq. 3.9, obtém-se  $h$  em função do tempo. Deste modo,

$$h(t) = \frac{v_\infty^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_\infty} \quad (3.12)$$

Estas três funções estão representadas nos gráficos da Fig. 3.1.

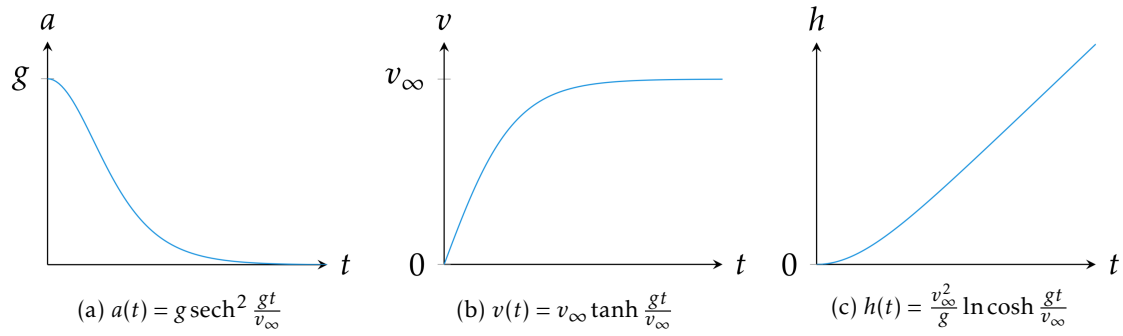


Figura 3.1: Queda livre com arrasto: (a) Aceleração; (b) Velocidade; (c) Altura.

### 3.1.2 Procedimento Experimental

Para estudar a queda livre e o efeito da força de arrasto foram realizadas várias experiências, nas quais se deixou cair o R-IoT de várias alturas e com diferentes configurações (i.e. diferentes objetos anexados a este) para, deste modo, fazer variar o coeficiente de arrasto de cada configuração. A experiência de maior análise foi realizada nas escadas do Departamento de Química da FCT-UNL em que o R-IoT foi envolvido numa proteção esponjosa (ver Fig. 3.2) de modo a não ficar danificado.

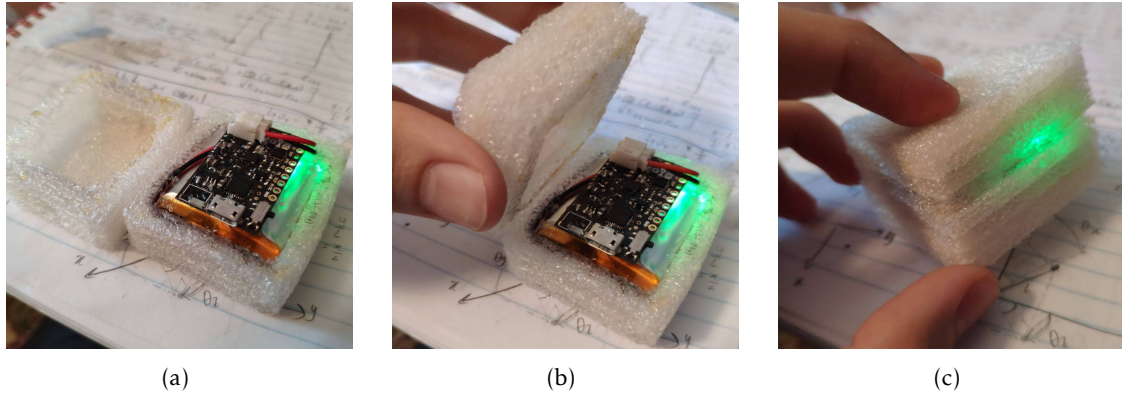


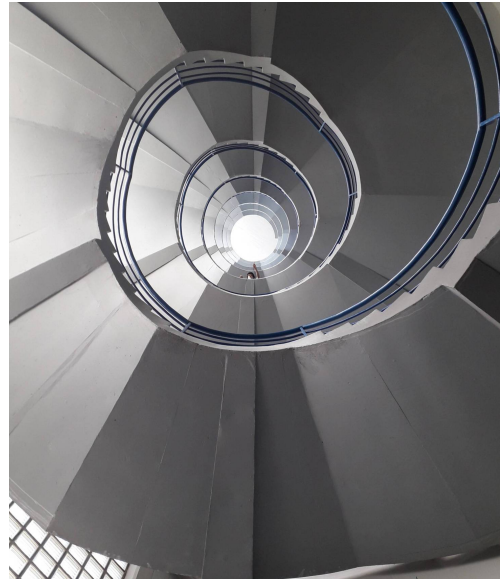
Figura 3.2: Passos da montagem da proteção no R-IoT. Depois de (c), foi colocada fita-cola para prender ambos os lados da proteção.

Este corpo foi então largado de uma altura de cerca de 27 m (6º andar) enquanto transmite o sinal do acelerómetro para o computador (Fig. 3.3). Note-se que a esta distância a ligação por *Bluetooth* não funcionaria, pelo que a ligação *Wi-Fi* se torna bastante vantajosa.

Após a aquisição dos dados, foi utilizada a secção “FREE FALL” do *plugin* criado no *OpenSignals* para extrair os dados. Esta secção está representada na Fig. 3.4, onde é possível observar que apenas existe um campo onde o utilizador pode seleccionar qual o eixo do acelerómetro que tem a direcção predominante durante a queda. Tendo em conta que é impossível garantir que durante o movimento de queda a orientação do R-IoT se mantém constante, este campo é importante, pois permitirá ao programa realizar um procedimento que tem em conta esta rotação, e onde o objetivo é criar um único eixo

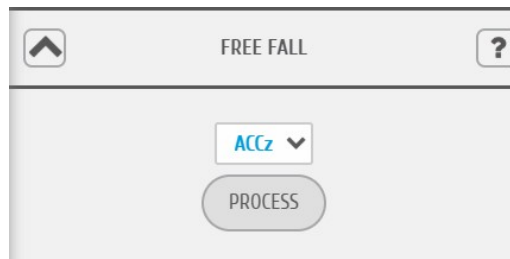


(a) Vista de cima

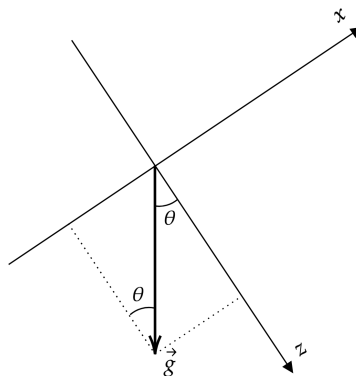


(b) Vista de baixo

Figura 3.3: Fotografias do local da experiência em estudo.

Figura 3.4: Secção do *plugin* direcionada à experiência da queda livre.

que aponta sempre na direção da aceleração gravítica. Para efectuar este procedimento, é possível, a partir da Fig. 3.5, realizar os seguintes passos para obter um único eixo não nulo. Sendo  $\theta$  o ângulo formado entre o vetor da aceleração gravítica  $\vec{g}$  e o eixo seleccionado, neste caso o eixo  $z$ , tem-se:

Figura 3.5: Esquema representando dois dos três eixos do sensor de aceleração do R-IoT e o vetor de aceleração gravítica  $\vec{g}$  relativamente a estes. O vetor  $\vec{g}$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ .

$$\tan \theta = \frac{x}{z} \Leftrightarrow \theta = \arctan \frac{x}{z} \quad (3.13)$$

De forma a criar um novo eixo  $z'$  com a direção de  $\vec{g}$ , define-se  $z'$  como sendo

$$z' = \frac{z}{\cos \theta} = \frac{z}{\cos\left(\arctan \frac{x}{z}\right)} \quad (3.14)$$

Consequentemente o novo eixo  $x'$ , perpendicular a  $z'$ , será

$$x' = 0 \quad (3.15)$$

Analogamente, pode-se realizar o mesmo processo entre o novo eixo  $z'$  e o eixo perpendicular  $y$ . Assim, assumindo que  $\alpha$  é o ângulo formado entre  $\vec{g}$  e o eixo  $z'$ , tem-se

$$z'' = \frac{z'}{\cos \alpha} = \frac{z'}{\cos\left(\arctan \frac{y}{z'}\right)} \quad (3.16)$$

e como são perpendiculares o novo eixo  $y'$  será

$$y' = 0 \quad (3.17)$$

Foi então criada uma função no código do *plugin* que realiza esta operação na secção “FREE FALL”. Desta forma haverá um único eixo diferente de zero e terá o sentido da aceleração gravítica. Em valor absoluto, o resultado deste cálculo seria exatamente o mesmo que o valor do módulo da aceleração calculada para os três eixos, mas, desta forma, é possível distinguir o movimento ascendente do movimento descendente, algo que não seria possível recorrendo apenas ao módulo. Será bastante mais útil se, em vez de apenas largarmos o R-IoT, o lançássemos verticalmente para cima, sublinhando que o resultado seria apenas válido para trajetórias verticais.

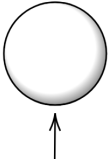
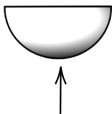
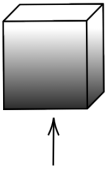
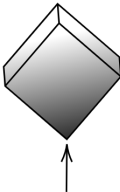
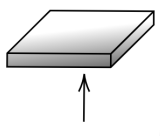

### 3.1.3 Resultados

Como referido na subsecção anterior, serão analisados com maior detalhe os dados referentes ao ensaio da queda do 6º andar.

A esponja de proteção do R-IoT ao formar um cubo origina um coeficiente de arrasto relativo a esta forma e que pode ser consultado na Tabela 3.1, tendo o valor de 1,05 quando o fluído se desloca perpendicularmente a uma das suas faces. Para além da variação do valor do coeficiente de arrasto, há também um aumento da área da secção transversal perpendicular ao movimento relativo do fluído, aumentando assim a força de atrito e a instabilidade durante a queda.

Após adquirir no *OpenSignals* o sinal resultante da queda do 6º andar, podendo este ser observado na Fig. 3.6, foram exportados os dados já tratados através do *plugin*. Obtiveram-se desta forma os gráficos da aceleração, velocidade e deslocamento, presentes respetivamente nas Figs. 3.7, 3.8 e 3.9, onde o instante  $t = 0$  s corresponde ao momento em que se largou o corpo. As curvas teóricas presentes nos gráficos das figuras mencionadas

Tabela 3.1: Coeficientes de arrasto ( $C_A$ ) para vários objetos sujeitos a um fluxo de ar (representado por uma seta). Estes valores foram retirados de Hoerner (1965) [26].

Nome	Esfera	Semi-esfera	Cubo	Cubo inclinado	Placa	Corpo aerodinâmico
Forma						
$C_A$	0,47	0,42	1,05	0,80	1,17	0,04

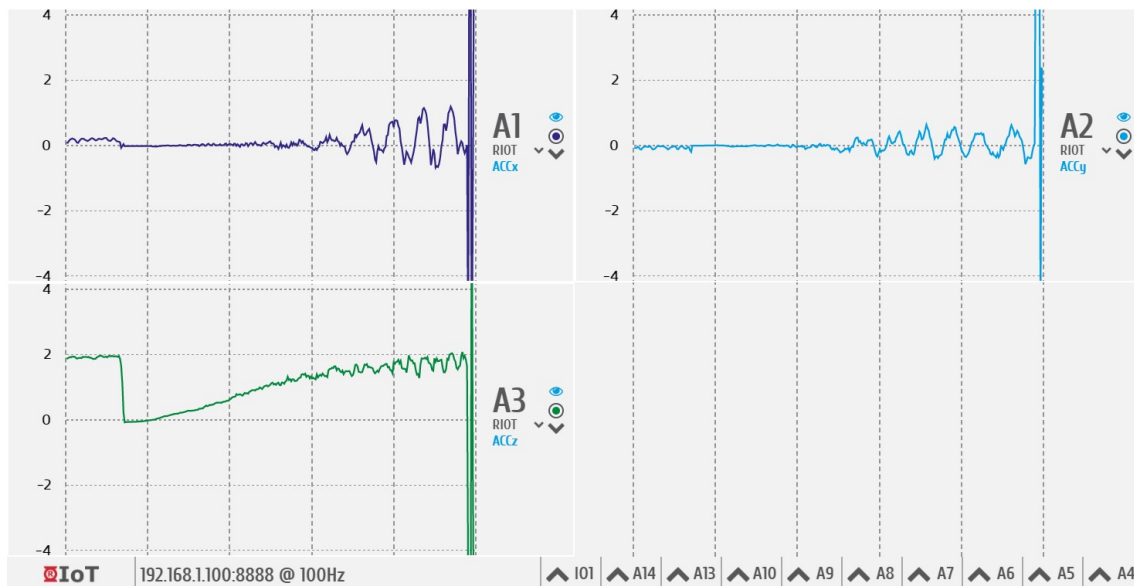


Figura 3.6: Captura de ecrã dos resultados obtidos para cada eixo do acelerómetro após gravar a experiência no OpenSignals.

são obtidas recorrendo respectivamente às equações (3.11), (3.9) e (3.12). Nestas, foram utilizados para o cálculo o valor tabelado do coeficiente de arrasto para o cubo (1,05), a área da secção transversal do corpo ( $4,0\text{cm} \times 4,5\text{cm}$ ), a massa do conjunto (0,019 g) e a densidade média do ar a  $20^\circ\text{C}$  e ao nível do mar ( $1,2041\text{ kg m}^{-3}$ , de acordo com a *International Standard Atmosphere* (ISA)).

Nos gráficos das Figs. 3.6 e 3.7 verifica-se um aumento do ruído ao longo do tempo, resultado do aumento da instabilidade ao longo da queda, provocado sobretudo pela distribuição de massa não uniforme no interior da esponja cúbica de proteção do R-IoT. Este ruído não é facilmente removível durante o tratamento dos dados, apenas o processo de integração leva à redução deste, como se pode observar nas Figs. 3.8 e 3.9. De qualquer modo, é bem visível na Fig. 3.7 a boa aproximação dos valores teóricos aos resultados obtidos, realçando a tendência do valor da aceleração em anular-se (especialmente após

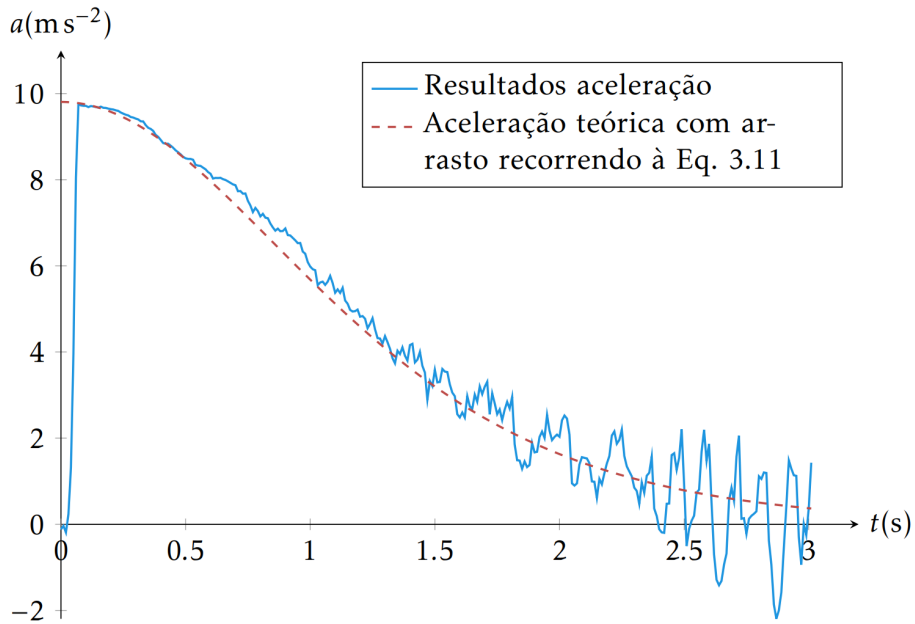


Figura 3.7: Aceleração do R-IoT durante a queda livre em função do tempo. O ruído a partir dos 1,5 s é consequência da instabilidade do R-IoT durante a fase final da queda.

os 2 s). A subida acentuada do valor do sinal da aceleração imediatamente após o início da queda é consequência do deslocamento da massa de cada eixo do acelerómetro não ser instantâneo, demorando cerca de 0,1 s como é visível no gráfico da Fig. 3.7. Este intervalo de tempo é incluído no gráfico de modo a comparar com a curva teórica, pois o corpo, durante esse intervalo de tempo, já esteve sujeito à força de arrasto, ou seja, o valor máximo do sinal obtido já será inferior a  $g$ .

No gráfico da Fig. 3.8, os resultados foram obtidos através da integração dos dados da aceleração presentes na Fig. 3.7. Como o valor da aceleração tende para zero, esta integração resulta na convergência dos resultados num valor máximo de velocidade, ou seja, na velocidade limite. Esta velocidade foi calculada teoricamente a partir das características do corpo (com  $C_A = 1,05$ ) e do meio e recorrendo à Eq. 3.10, obtendo um valor de  $v_\infty \approx 12,7 \text{ m s}^{-1}$ . No mesmo gráfico está presente para comparação (a verde) o valor teórico da velocidade sem arrasto, onde a diferença entre as duas velocidades teóricas, apesar de ser ínfima no início da queda, aumenta consideravelmente ao longo do tempo, culminando num desvio de cerca de  $17 \text{ m s}^{-1}$ .

Da mesma forma, foi integrada a velocidade de forma a obter o gráfico da Fig. 3.9, onde também estão presentes as curvas referentes à altura teórica com arrasto (obtida a partir da Eq. 3.12) e sem arrasto. É possível observar a diferença entre a altura final obtida através da aceleração do R-IoT e a altura teórica sem arrasto para o mesmo instante, representado na figura por  $\Delta h$ , tendo um valor de 16,5 m. Ou seja, se fosse calculada a altura teórica sem ter em conta a força de arrasto (tendo em conta apenas a força gravítica), produzir-se-ia um erro de 16,5 m após 3 s (i.e. 61 %), neste caso concreto.



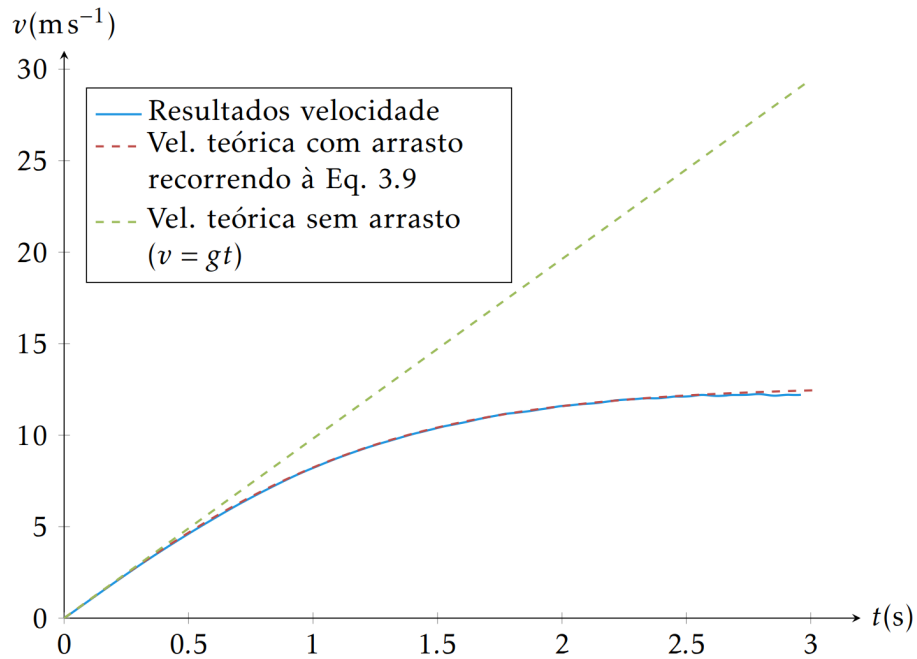


Figura 3.8: Velocidade do R-IoT durante a queda livre em função do tempo. Estes resultados são obtidos a partir da integração dos dados adquiridos pelo acelerómetro (Fig. 3.7). Verifica-se que a velocidade atinge valores bastante próximos da velocidade limite.

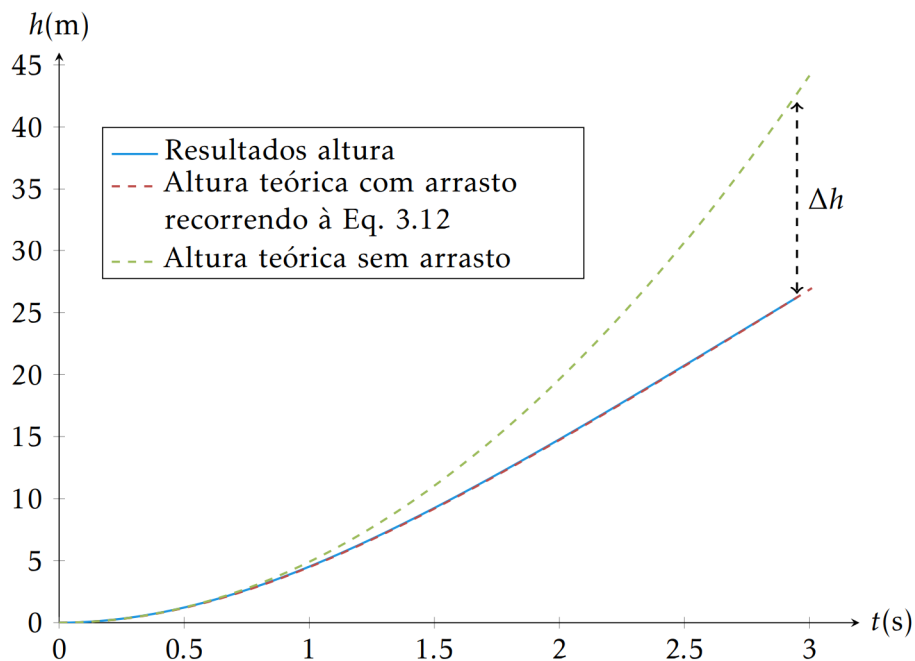


Figura 3.9: Altura do R-IoT durante a queda livre em função do tempo.  $\Delta h$  representa a diferença entre a altura final calculada a partir dos resultados obtidos e a altura teórica final sem arrasto. Estes resultados foram obtidos através da integração dos valores da velocidade representados na Fig. 3.8.



Foram também realizados ensaios para alturas inferiores (cerca de 4 m) em que se variava a forma do corpo, de modo a comparar os resultados com a teoria para diferentes coeficientes de arrasto, áreas da secção transversal e massas do corpo. Dois exemplos estão representados na Fig. 3.10.

Em 3.10a, o R-IoT foi inserido no centro de uma bola esponjosa com 6 cm de diâmetro e massa do conjunto de 34 g e onde previamente se tinha aberto uma fenda com as dimensões deste. Os valores da aceleração teórica do conjunto (a vermelho) foram obtidos recorrendo novamente à Eq. 3.11, utilizando os valores mencionados das suas características físicas e o coeficiente de arrasto de uma esfera ( $C_A = 0,47$ , recorrendo à tabela 3.1). Para obter o gráfico da Fig. 3.10b anexou-se o R-IoT a uma esfera com maior massa e menor diâmetro (65 g e 4,4 cm) e, não estando neste caso inserido no centro da esfera, deixou-se cair com o R-IoT na parte superior da esfera em relação ao movimento da queda. Calculou-se da mesma forma a aceleração teórica.

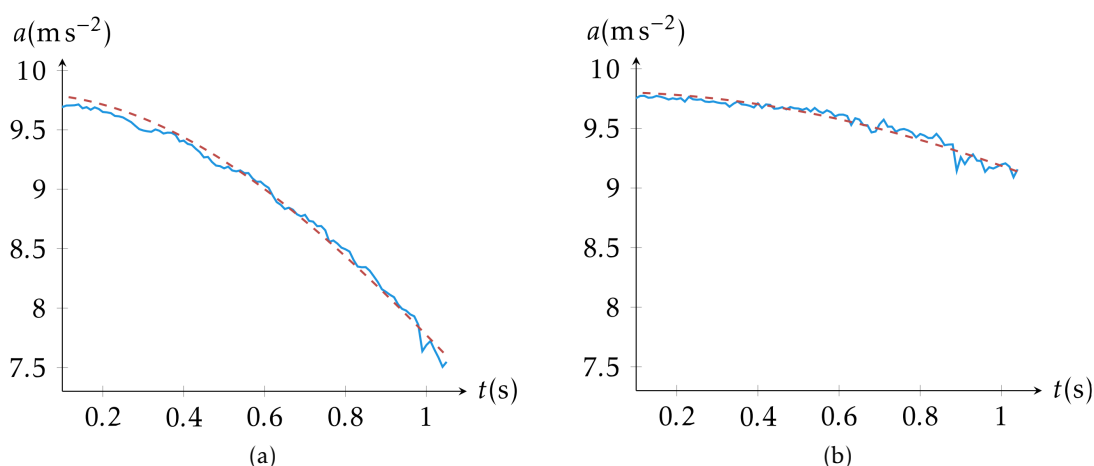


Figura 3.10: Aceleração (a azul) obtida na queda livre de cerca de 4 m de duas esferas com características diferentes e respetivo valor teórico (a vermelho), calculado a partir da Eq. 3.11. (a) esfera com 6 cm de diâmetro e 34 g; (b) esfera com 4,4 cm de diâmetro e 65 g.

Em ambos os gráficos é bem visível a boa aproximação do valor teórico relativamente aos resultados obtidos. Assim, é possível recorrer a uma experiência deste género de modo a calcular o coeficiente de arrasto de um objeto com uma forma não tão bem definida ou que não esteja tabelada, já que obter este valor não é tão trivial como obter os restantes valores necessários ao cálculo da aceleração do corpo.

Tendo em conta a possibilidade de obter o coeficiente de arrasto para uma forma não tabelada, foi realizada outra experiência em que ao R-IoT era anexada na parte inferior uma borracha. Deste modo, a sua massa aumentaria relativamente à primeira experiência e a área da secção transversal não mudaria, resultando teoricamente numa velocidade limite superior e maior estabilidade. Foi então largado o conjunto com 30 g do 5º andar (cerca de 22 m). O gráfico resultante da aceleração em função do tempo está representado na Fig. 3.11. O valor do coeficiente de arrasto deste conjunto foi calculado de modo a que a curva teórica ficasse ajustada aos dados. Resultou assim num coeficiente de arrasto de

0,73 (inferior ao do cubo como era esperado).

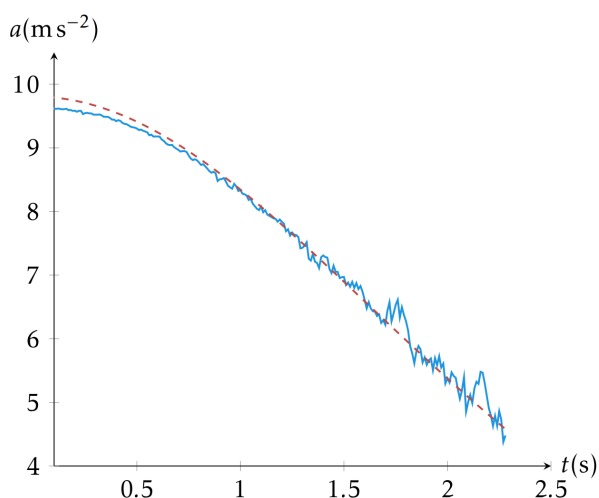


Figura 3.11: Aceleração (a azul) obtida na queda livre de cerca de 22 m do R-IoT com uma borracha anexada na base deste e curva teórica do conjunto (a vermelho), obtida a partir da Eq. 3.11.

### 3.1.4 Trabalho do Aluno

De modo a entender melhor o efeito da força de arrasto num corpo em queda, é esperado que o aluno, para além de conhecer os factores que influenciam a força de arrasto, saiba relacionar o coeficiente de arrasto com a forma do corpo em estudo.

Apesar de ser o *plugin* do *OpenSignals* a extrair já os dados integrados da velocidade e do deslocamento, é também importante que o aluno, ao traçar os gráficos da aceleração, da velocidade e do deslocamento, relacione estes três gráficos no que diz respeito à forma de obtenção destes dois últimos. Para um nível mais avançado, os dados deverão ser extraídos recorrendo à secção “CUSTOM” do *plugin* (com o acelerómetro selecionado), já que, desta forma, apenas os dados calibrados do acelerómetro serão exportados, necessitando posteriormente de tratamento (i.e. obter velocidade e deslocamento) numa folha de cálculo ou equivalente.

## 3.2 Colisão Inelástica e Coeficiente de Restituição

Nesta secção analisa-se uma experiência simples em que um dos objetivos, para além de estudar as propriedades da colisão inelástica, é determinar o valor do coeficiente de restituição de duas bolas com características diferentes, procedendo para isso à análise do sinal resultante das sucessivas colisões entre estas e o chão, após as mesmas serem largadas a uma certa altura deste. Este sinal indica apenas o instante de cada colisão, já que é obtido pelo acelerómetro do R-IoT, em repouso, através das vibrações no chão provocadas pelas sucessivas colisões. Consequentemente, são também relacionadas as características de cada bola com o número de colisões detetadas até atingir o repouso.

Outro objetivo é calcular o tempo teórico necessário até cada bola atingir o repouso, assumindo um coeficiente de restituição constante, e compará-lo aos resultados experimentais.

### 3.2.1 Introdução Teórica

Quando um corpo colide com outro corpo de massa consideravelmente maior (por exemplo uma bola com a Terra), e assumindo que apenas está sujeito à força gravítica, a velocidade do corpo após a colisão,  $v_2$ , será uma fração da velocidade antes desta,  $v_1$ . A esta fração chama-se coeficiente de restituição e é definido por:

$$C_r = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} = \frac{v_2}{v_1} \quad (3.18)$$

Este coeficiente depende de vários fatores, tais como a forma do corpo, o material, a rigidez, o tipo de superfície entre outros.

Considerando que é largada uma bola de uma altura  $h_0$ , esta irá colidir sucessivamente com o chão, diminuindo a altura máxima de cada ressalto e, conseqüentemente, diminuindo o tempo entre colisões sucessivas. Na Fig. 3.12 está representado o gráfico esperado de um caso idêntico. Como a bola parte do repouso, o módulo da velocidade para cada colisão é dado por

$$v = g \frac{\Delta t}{2} \quad (3.19)$$

em que  $\Delta t$  é o tempo decorrido entre duas colisões sucessivas com o chão. Assumindo que o coeficiente de restituição não depende da velocidade da esfera (já que são velocidades relativamente pequenas) tem-se

$$C_r = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \quad (3.20)$$

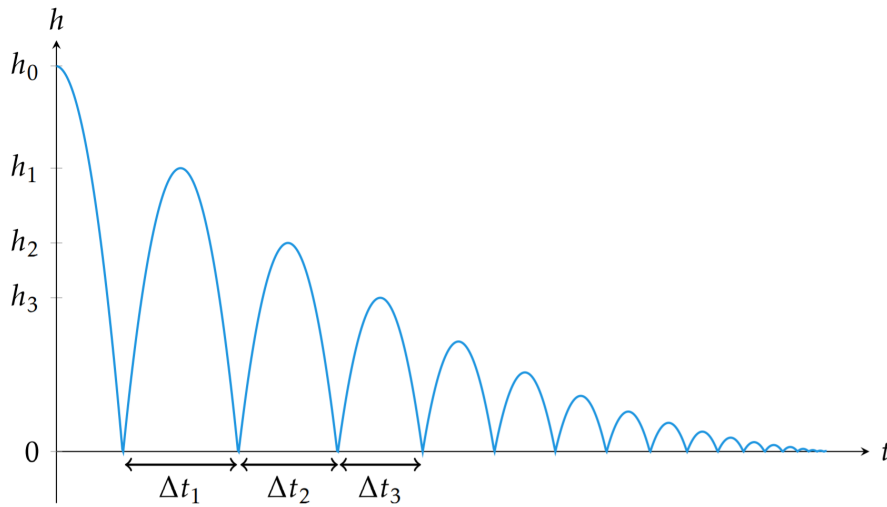


Figura 3.12: Altura teórica em função do tempo para uma bola largada de  $h_0$  e que colide sucessivamente com o chão.  $\Delta t_n$  é o tempo decorrido entre a colisão  $n$  e  $n + 1$ .

em que  $v_n$  é a velocidade imediatamente antes da colisão  $n$  e  $\Delta t_n$  é o tempo decorrido entre a colisão  $n$  e a colisão  $n + 1$ . A velocidade antes da colisão  $n$  dependerá do número de colisões que já ocorreram da seguinte forma:

$$v_n = v_0 C_r^n \quad (3.21)$$

sendo  $v_0$  a velocidade imediatamente antes da primeira colisão. Partindo de 3.19, a velocidade imediatamente antes da colisão  $n$  será

$$v_n = g \frac{\Delta t_n}{2} \quad (3.22)$$

Resolvendo em ordem ao intervalo de tempo,

$$\Delta t_n = \frac{2v_n}{g} \quad (3.23)$$

Substituindo 3.21 em 3.23,

$$\Delta t_n = \Delta t_0 C_r^n \quad (3.24)$$

onde  $\Delta t_0 = 2v_0/g$  e corresponde ao dobro do tempo que o corpo demora a ir de  $h_0$  até ao chão na primeira colisão. Aplicando o logaritmo a ambos os membros de 3.24 obtém-se

$$\ln \Delta t_n = n \ln C_r + \ln \Delta t_0 \quad (3.25)$$

Assim, ao construir o gráfico de  $\ln \Delta t_n$  em função de  $n$ , obtém-se uma reta com declive  $\ln C_r$  e ordenada na origem  $\ln \Delta t_0$ . A altura inicial de que o corpo cai será dada por

$$h_0 = \frac{1}{2} g \left( \frac{\Delta t_0}{2} \right)^2 \quad (3.26)$$

Resolvendo em ordem a  $g$  tem-se que

$$g = \frac{8h_0}{\Delta t_0^2} \quad (3.27)$$

Ou seja, a partir da Eq. 3.25, é possível obter uma estimativa para  $C_r$ , calculando o declive da reta, e uma estimativa para  $g$ , calculando a ordenada na origem [27].

### 3.2.2 Procedimento Experimental

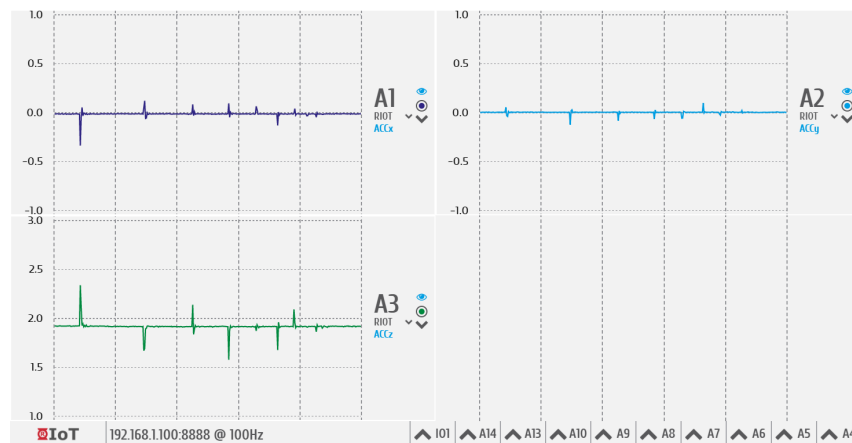
Para a realização desta experiência basta colocar o R-IoT numa superfície plana (o chão por exemplo) e deixar cair uma bola na mesma superfície e relativamente próxima do R-IoT (entre 5 cm e 30 cm), de modo a não colidir com este e também a que as suas colisões sejam detetáveis pelo mesmo. Enquanto o R-IoT está a adquirir o sinal, as colisões da bola com o chão são registadas no sinal do acelerómetro. Caso o sinal não seja facilmente detetável, deve ser alterada o tipo de superfície para uma que absorva menos as colisões, ou alterada o tipo de bola para uma mais rígida. Para os ensaios analisados nesta secção foi utilizada uma superfície em mármore, pois verificou-se que esta proporcionava uma

boa deteção das colisões pelo acelerómetro, ao contrário de uma superfície em madeira, que reduzia a qualidade do sinal obtido.

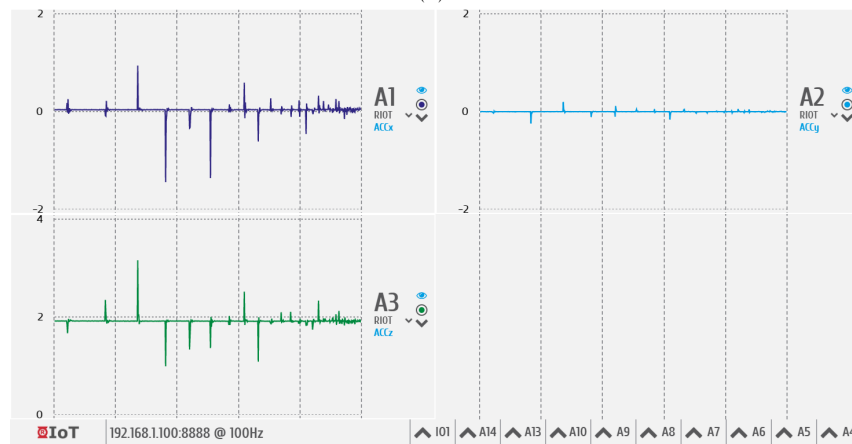
Ao processar o ficheiro gravado na secção “INELASTIC COLLISION”, é calculado de forma automática o intervalo de tempo entre os picos do módulo da aceleração. Depois é exportada uma coluna com o número da colisão e o respetivo tempo após a primeira colisão, depois de se ter confirmado no *plugin* se os picos foram corretamente assinalados. Foi também implementada uma opção que torna possível ao utilizador selecionar os pontos que deseja adicionar ou remover caso não tenham sido automaticamente bem assinalados, bastando para isso carregar sobre os mesmos.

### 3.2.3 Resultados

Foram realizadas duas experiências em que se alterou o tipo de bola. Numa usou-se uma bola de ténis ( $m = (58 \pm 1)\text{g}$ ) e na outra uma bola de golfe ( $m = (43 \pm 1)\text{g}$ ). Os resultados do sinal obtido diretamente no *OpenSignals* estão presentes na Fig. 3.13 em unidades de  $g$  e ainda não calibrados. Depois de gravados os ficheiros com as colisões,



(a)



(b)

Figura 3.13: Captura de ecrã dos resultados obtidos para cada eixo do acelerómetro após gravar a experiência no *OpenSignals* com: (a) bola de ténis; (b) bola de golfe.

recorreu-se ao plugin criado de modo a calcular automaticamente os máximos do módulo da aceleração do R-IoT e a extraí-los para uma folha de cálculo. As Figs. 3.14a e 3.14b mostram o plugin após processar o ficheiro gravado para cada bola, onde o eixo vertical representa o módulo da aceleração do R-IoT em unidades SI e o eixo horizontal representa o tempo. Os pontos vermelhos foram calculados automaticamente consoante o valor de

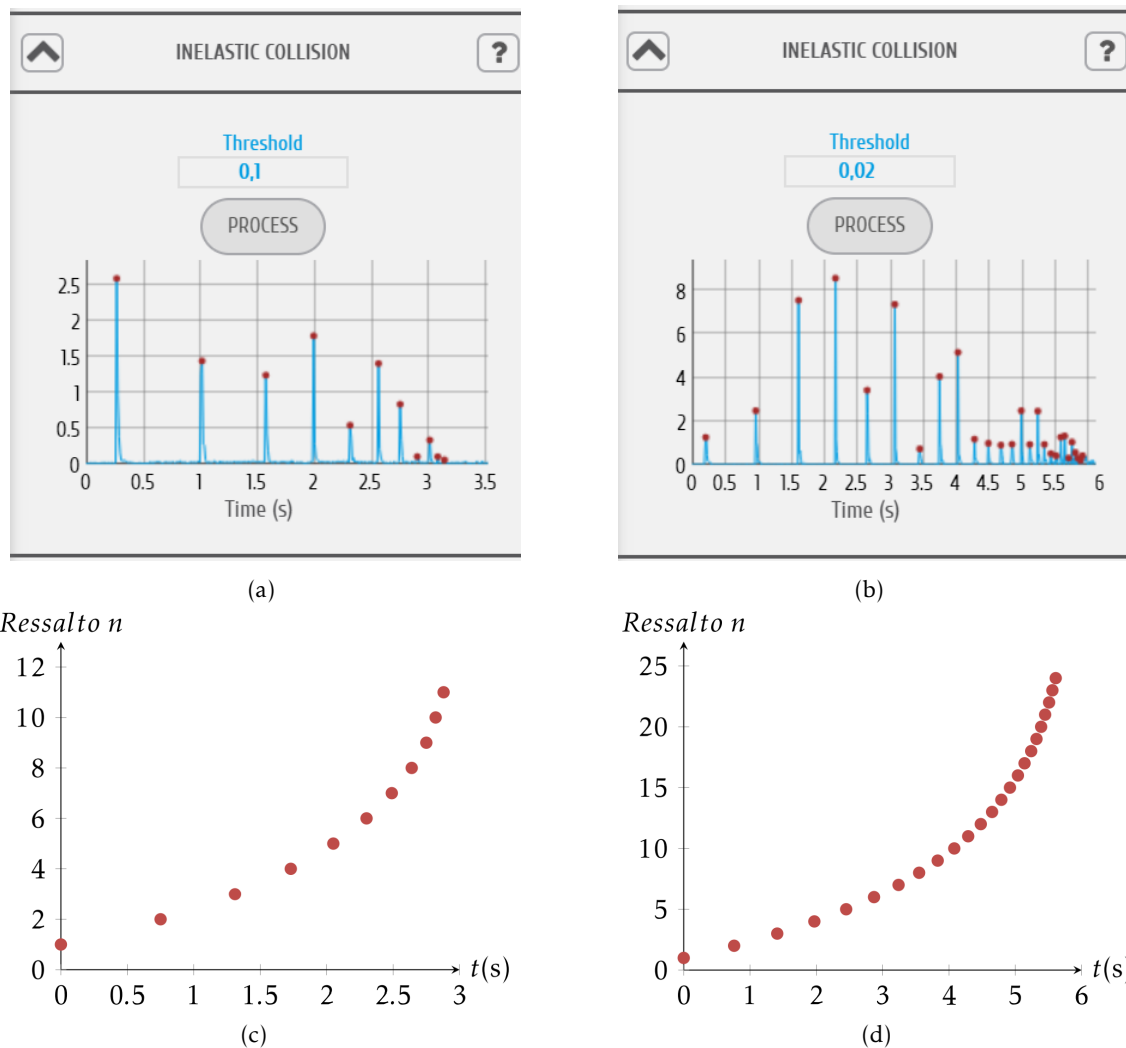


Figura 3.14: Resultados experimentais de sucessivas colisões inelásticas com o chão de uma bola de ténis (à esquerda) e de uma bola de golfe (à direita). Os pontos assinalados nas imagens em cima correspondem aos pontos dos gráficos imediatamente abaixo. (a) e (b): Máximos locais do módulo da aceleração em função do tempo calculados no próprio *plugin* para a bola de ténis (a) e para a bola de golfe (b); (c) e (d): Representação dos dados extraídos pelo *plugin* para a bola de ténis (c) e para a bola de golfe (d), sendo estes apenas o número ordinal de cada ressalto e o respetivo tempo após o primeiro ressalto.

*Threshold* escolhido. Quanto maior este valor, maior a intensidade que o sinal da aceleração terá que ter para ser considerado como uma colisão; quanto menor este valor, mais facilmente serão detetadas as colisões. Este parâmetro deverá ser escolhido de acordo com o tipo de superfície utilizada e com o tipo de bola em estudo. O facto dos valores da aceleração correspondentes aos picos assinalados não decrescerem de forma gradual

(Figs. 3.14a e 3.14b), pode ser explicado pelas colisões não serem perfeitas, levando a que, a cada ressalto, o local da colisão varie, de forma a aproximar-se ou afastar-se ligeiramente do R-IoT. Os dados extraídos são o número de cada colisão e o tempo desde a primeira colisão, estando representados nos gráficos das Figs. 3.14c e 3.14d para a bola de ténis e para a bola de golfe respetivamente.

Um facto curioso é que, teoricamente e assumindo um coeficiente de restituição constante, para chegarem ao repouso, as bolas terão que colidir infinitas vezes com o chão, já que a cada colisão a sua velocidade seria uma fração ( $C_r$ ) da anterior *ad infinitum*. Isto não implica, tal como sugerem as Figs. 3.14c e 3.14d, que o tempo necessário para o repouso seja infinito. Pelo contrário, o tempo será finito e será o resultado da série geométrica convergente do tempo entre colisões (Eq. 3.24) visto que  $C_r < 1$ . Esta observação é de certa forma uma variante dos paradoxos de Zenão de Eleia [28]. No fim desta subsecção será calculado o tempo necessário para cada bola atingir o repouso.

Na Fig. 3.15 estão representados em escala logarítmica os tempos entre colisões sucessivas,  $\Delta t_n$ , em função da colisão  $n$  para a bola de ténis e para a bola de golfe. Recorrendo

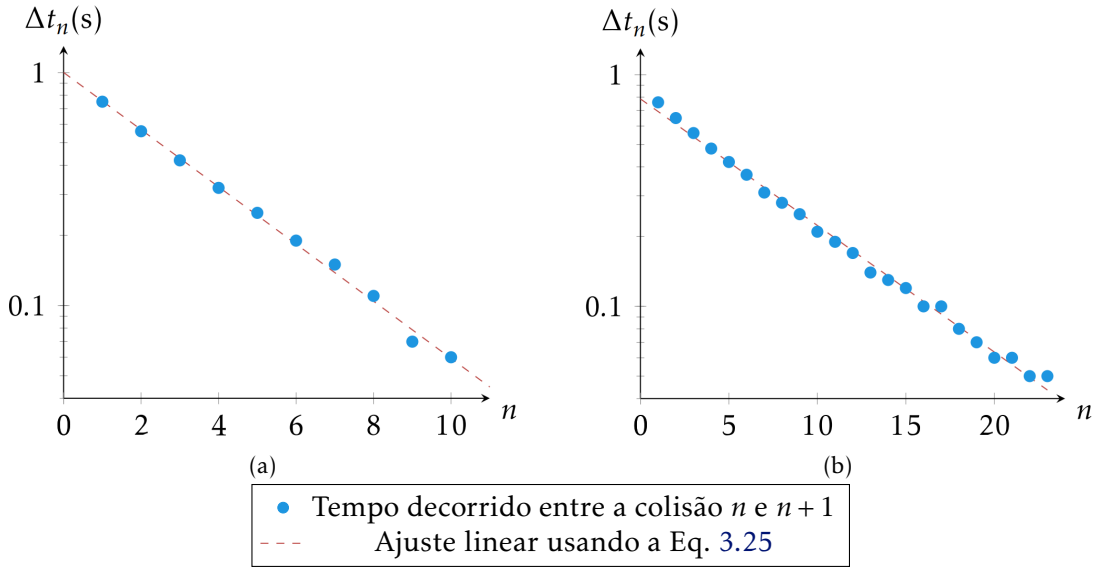


Figura 3.15: Tempo decorrido entre as colisões  $n$  e  $n + 1$ ,  $\Delta t_n$ , em função da colisão  $n$  para: (a) bola de ténis; (b) bola de golfe.

ao método dos mínimos quadrados para a Eq. 3.25, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$C_r(\text{ténis}) = 0,754 \pm 0,005 \quad (3.28)$$

$$\Delta t_0(\text{ténis}) = 1,00 \text{ s} \pm 0,04 \text{ s} \quad (3.29)$$

$$C_r(\text{golfe}) = 0,879 \pm 0,002 \quad (3.30)$$

$$\Delta t_0(\text{golfe}) = 0,81 \text{ s} \pm 0,02 \text{ s} \quad (3.31)$$

A incerteza referente a cada um destes valores é a incerteza proveniente apenas da aplicação do método dos mínimos quadrados, não tendo associada a esta erros de medição.

Tendo em conta que  $h_0(\text{ténis}) = (1,24 \pm 0,01) \text{ m}$  e  $h_0(\text{golfe}) = (0,80 \pm 0,01) \text{ m}$  obtém-se, substituindo  $h_0$  em 3.27:

$$g(\text{ténis}) = 9,9 \text{ m s}^{-2} \pm 0,7 \text{ m s}^{-2} \quad (3.32)$$

$$g(\text{golfe}) = 9,8 \text{ m s}^{-2} \pm 0,5 \text{ m s}^{-2} \quad (3.33)$$

Comparando com o valor padrão convencional ( $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$ ), obtêm-se erros relativos de 0,95 % e 0,07 % respetivamente.

Relativamente à soma de todos os tempos de colisão,  $T$ , tem-se:

$$T = \sum \Delta t = \frac{\Delta t_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_0 C_r^n = \frac{\Delta t_0}{2} + \Delta t_0 \frac{C_r}{1 - C_r} \quad (3.34)$$

Calculando com os valores obtidos anteriormente obtém-se:

$$T(\text{ténis}) = 3,6 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s} \quad (3.35)$$

$$T(\text{golfe}) = 6,3 \text{ s} \pm 0,2 \text{ s} \quad (3.36)$$

Estes valores parecem estar de acordo com o comportamento observado nos gráficos das Figs. 3.14c e 3.14d.

### 3.2.4 Trabalho do Aluno

É esperado que o aluno saiba utilizar uma folha de cálculo para trabalhar sobre os resultados extraídos pelo plugin, de modo a obter os valores do coeficiente de restituição e da aceleração gravítica. É necessário realizar o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados e obter as incertezas resultantes desse método.

## 3.3 Momento de Inércia no Plano Inclinado

Esta secção tem como objetivo estudar o movimento de rolamento de cilindros com diferentes características ao longo de um plano inclinado. É analisada nas duas próximas subsecções a influência do momento de inércia de cada cilindro na sua velocidade ao longo do tempo, sendo também comparados os resultados com os valores teóricos obtidos. Complementarmente, é estudada a influência de água líquida no interior do cilindro no rolamento deste ao longo do plano inclinado, sendo comparada aos resultados da mesma experiência mas com água na forma de gelo no cilindro.

### 3.3.1 Introdução Teórica

De modo a estudar o caso em que um corpo cilíndrico de massa  $M$  roda sem deslizar ao longo de um plano inclinado com um ângulo  $\theta$ , é útil a representação esquemática das forças aplicadas ao mesmo. Esta pode ser observada na Fig. 3.16.

Como o corpo não desliza no plano, isto implica que

$$a_{CM} = R\alpha \quad (3.37)$$



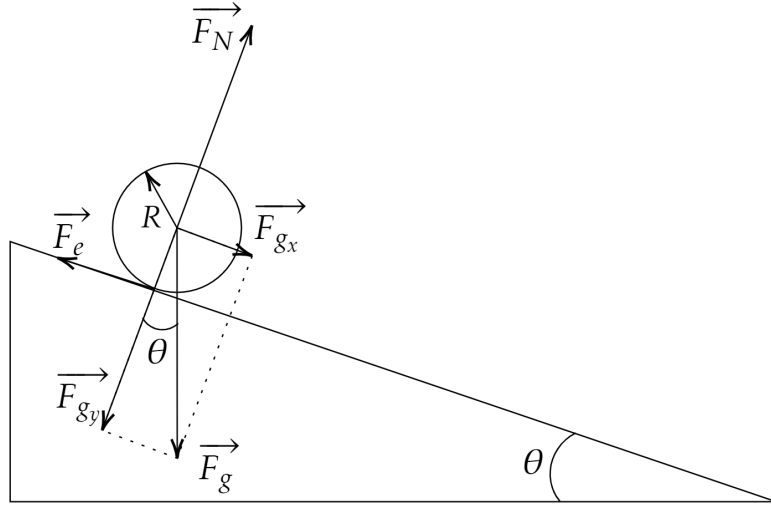


Figura 3.16: Um cilindro com raio  $R$  roda ao longo de um plano inclinado com um ângulo  $\theta$ . Sobre o corpo estão aplicadas a força gravítica  $\vec{F}_g$ , a força normal  $\vec{F}_N$  e a força de atrito estático  $\vec{F}_e$ .

em que  $a_{CM}$  é a aceleração linear do centro de massa,  $R$  é o raio do cilindro e  $\alpha$  a aceleração angular do mesmo. Para obter uma expressão para  $a_{CM}$  do corpo, pode-se recorrer à 2ª lei de Newton linear e à sua equivalente para a rotação. Assim, começando pela primeira,

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \quad (3.38)$$

Assumindo que a componente  $x$  do sistema de coordenadas cartesiano é paralela ao plano e aponta no sentido descendente deste, pode-se aplicar a Eq. 3.38 a este eixo, resultando:

$$Mg \sin \theta - F_e = Ma_{CM_x} \quad (3.39)$$

Escrevendo agora a 2ª lei de Newton para a rotação:

$$\sum \tau = I\alpha \quad (3.40)$$

sendo o primeiro membro da expressão a soma dos momentos de força (ou torques) aplicadas no corpo em relação ao eixo de rotação, e o segundo o produto entre o momento de inércia em relação ao eixo de rotação e a aceleração angular do corpo. Como a força de atrito  $\vec{F}_e$  é a única força aplicada a uma distância não nula do centro de massa do objeto, será consequentemente a única a produzir um torque não nulo. Assim, substituindo na Eq. 3.40,

$$RF_e = I\alpha \quad (3.41)$$

Recordando que o corpo não desliza no plano, substituindo a Eq. 3.37 na Eq. 3.41 obtém-se:

$$F_e = I \frac{a_{CM_x}}{R^2} \quad (3.42)$$

Tem-se assim uma expressão para a força de atrito estático, que pode ser substituída na Eq. 3.39 de modo a obter a aceleração linear. Como a resultante das forças em  $y$  é

nula, também será a aceleração nesta componente, e, por isso, é retirada a coordenada subscrita.

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}} \quad (3.43)$$

Para um cilindro cheio de massa  $M$  com densidade uniforme e de raio  $R$ ,  $I = MR^2/2$ . Substituindo na Eq. 3.43,

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{MR^2/2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g \sin \theta \quad (3.44)$$

Como era esperado, a aceleração será menor do que a aceleração de um corpo a deslizar sobre o plano ( $g \sin \theta$ ), isto porque parte da energia será utilizada para fazer rodar o cilindro. Verifica-se ainda que a aceleração não depende nem da massa do cilindro nem do seu raio. Pode por isso esperar-se que dois cilindros cheios como os que estão representados na Fig. 3.17 se desloquem ao longo do plano inclinado sempre com velocidades idênticas independentemente das suas massas e dos seus raios. Analogamente, calculando

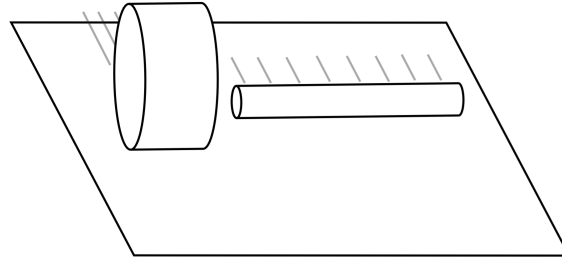


Figura 3.17: Dois cilindros cheios descem no plano inclinado sem deslizar com velocidades iguais independentemente das suas massas e dos seus raios.

a aceleração para um cilindro oco (com  $I = MR^2$ ), obtém-se  $a = \frac{1}{2}g \sin \theta$ , verificando-se que esta também não depende da massa nem do raio deste, resultando assim também num valor igual de aceleração para dois cilindros deste tipo com massas e raios diferentes. De forma mais geral, conclui-se que apenas a distribuição espacial da massa em torno do eixo de rotação influenciará o valor da aceleração, diminuindo esta com o afastamento da massa em relação ao eixo.

### 3.3.2 Procedimento Experimental

Para realizar a experiência da descida no plano inclinado, recorreu-se a um cilindro oco metálico com tampa (ver Fig. 3.18a) em que a esta se anexou o R-IoT de forma a rodar em torno de apenas um eixo do giroscópio, como está representado na Fig. 3.18b. De modo a produzir diferentes momentos de inércia para o mesmo cilindro, este foi configurado de quatro formas diferentes: cilindro oco; cilindro cheio com grão (cheio1); cilindro cheio com arroz (cheio2); e cilindro parcialmente cheio com areia formando uma espécie de anel grosso. Estas configurações (à exceção do cilindro cheio com grão) estão representadas na Fig. 3.19. À exceção do cilindro oco, todas as configurações foram preenchidas totalmente

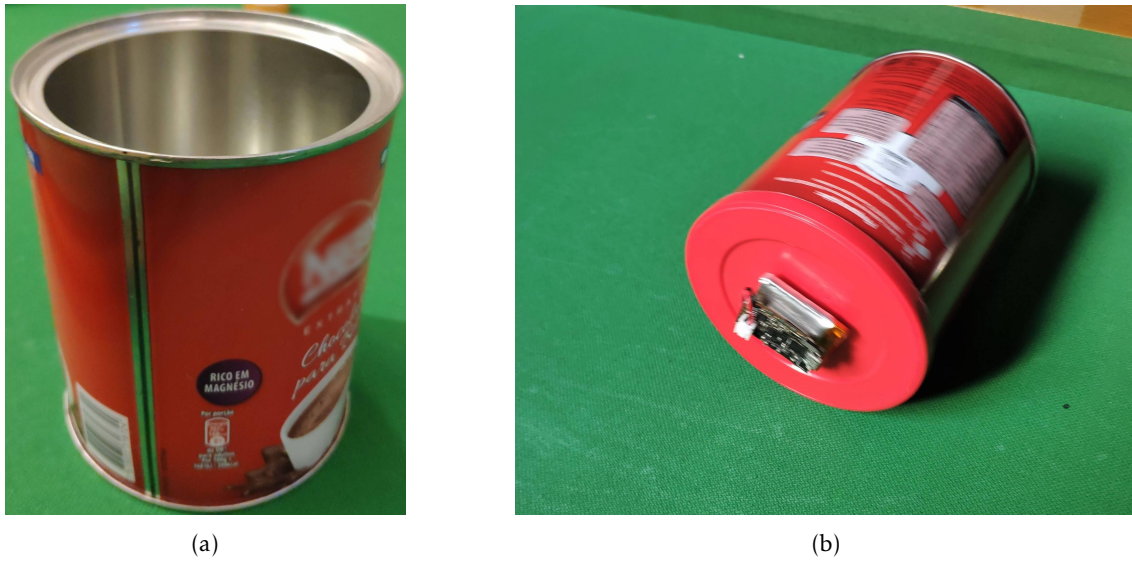


Figura 3.18: Fotografias do cilindro utilizado em todos os ensaios estudados nesta secção: (a) Cilindro sem tampa; (b) Cilindro em rotação com o R-IoT anexado à sua tampa.



Figura 3.19: Fotografias de diferentes configurações do cilindro representado na Fig. 3.18, de forma a variar a distribuição da massa relativamente ao eixo de rotação.

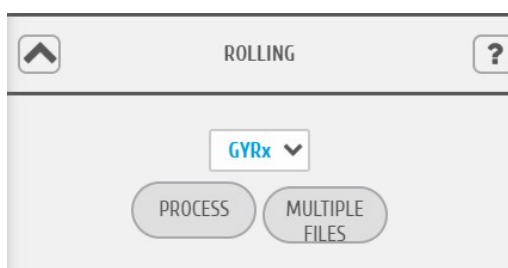
até ao limite definido, de modo a não haver movimentações internas, mantendo assim o momento de inércia constante durante a descida ao longo do plano inclinado.

O plano utilizado foi uma mesa de *snooker* com 1,61 m de comprimento, em que um dos lados se levantava de forma a obter diferentes alturas. O ângulo poderia ser então calculado recorrendo à trigonometria. Para comparar os resultados obtidos pelo sinal do giroscópio (velocidade angular) com a teoria, mediram-se as várias características físicas do cilindro com as diferentes configurações. Na Tabela 3.2 são apresentadas essas medidas, bem como os valores calculados do momento de inércia e do coeficiente  $I/(MR^2)$  para cada tipo de cilindro, tendo em conta a contribuição do R-IoT para o momento de inércia.

Tabela 3.2: Valores medidos e calculados das grandezas necessárias ao estudo da experiência do plano inclinado para as quatro configurações cilíndricas usadas.

	Anel	Oco	Cheio1	Cheio2
<b>Diâmetro externo (cm)</b>	$9,9 \pm 0,1$	$9,9 \pm 0,1$	$9,9 \pm 0,1$	$9,9 \pm 0,1$
<b>Diâmetro interno (cm)</b>	$5,0 \pm 0,1$			
<b>Altura (cm)</b>	$12,0 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,1$	$12,0 \pm 0,1$
<b>Massa (g)</b>	$1256 \pm 1$	$112 \pm 1$	$876 \pm 1$	$958 \pm 1$
<b><math>I</math> (<math>10^{-3} \text{ kg m}^2</math>)</b>	$1,90 \pm 0,04$	$0,21 \pm 0,05$	$1,06 \pm 0,02$	$1,16 \pm 0,02$
<b><math>I/(MR^2)</math> (1)</b>	$0,62 \pm 0,02$	$0,76 \pm 0,02$	$0,49 \pm 0,01$	$0,49 \pm 0,01$

Para esta experiência foi também criada uma secção no *plugin*, estando esta representada na Fig. 3.20. Após gravar os ficheiros pretendidos onde foi registado o sinal do giroscópio durante a descida no plano, o utilizador apenas tem de inserir o eixo em que se realizou a rotação e, caso analise apenas um ficheiro, escolher a opção “PROCESS”. Caso pretenda analisar vários ficheiros para o mesmo ângulo (como no caso presente), deve escolher “MULTIPLE FILES” e será extraído um ficheiro *.xlsx*, em que cada coluna corresponde à velocidade angular de cada cilindro (o cabeçalho da coluna será automaticamente retirado do nome de cada ficheiro, e.g. se um ficheiro se chamar “anel2-4,8°” o cabeçalho respetivo será “anel2”). A primeira coluna será sempre referente ao tempo.

Figura 3.20: Secção do *plugin* direcionada à experiência do plano inclinado.

### 3.3.3 Resultados

Após gravar individualmente as velocidades angulares obtidas pelo giroscópio do R-IoT durante a descida de cada cilindro para o mesmo ângulo, estas foram adicionadas à mesma folha de cálculo através do *plugin*. No gráfico da Fig. 3.21 estão representadas as velocidades de descida dos quatro cilindros utilizados em função do tempo (obtidas a partir da velocidade angular e do diâmetro dos cilindros), juntamente com as retas teóricas (recorrendo à Eq. 3.43 e aos valores obtidos na Tabela 3.2) de descida dos mesmos. Estes valores são referentes a apenas um ângulo de descida, em que, medindo a altura do lado da mesa levantado e o comprimento entre os pés desta, se obteve um valor de  $4,8^\circ$ .

Para todos os resultados nesta secção, os ângulos que foram medidos a partir das dimensões da mesa não correspondem aos valores obtidos experimentalmente recorrendo à Eq. 3.43. Neste caso concreto, o ângulo deduzido através dos valores experimentais tem

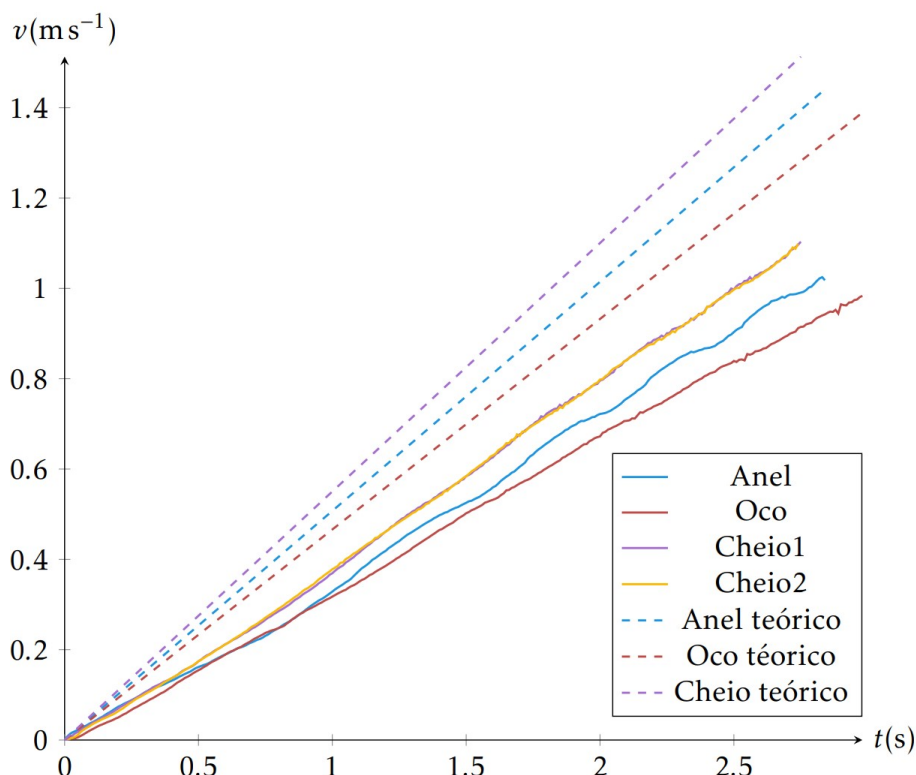


Figura 3.21: Velocidade em função do tempo para 4 cilindros diferentes a descer num plano inclinado. Note-se a quase perfeita sobreposição dos resultados experimentais para os cilindros cheio1 e cheio2.

um valor de  $3,5^\circ$ , cerca de 73 % do valor medido. Noutro ensaio com um ângulo medido de  $3^\circ$ , obteve-se através dos valores experimentais um ângulo de  $2,1^\circ$ , 70 % do valor medido. Verificou-se também que o erro relativo é idêntico para várias experiências em que não se varia o ângulo, independentemente das configurações do cilindro (ou seja, na Fig. 3.21, os valores experimentais de cada cilindro correspondem a 73 % dos valores teóricos correspondentes). Posto isto, é bastante provável que tenha ocorrido um erro sistemático na medição do ângulo.

Como é possível verificar, a relação entre as três retas obtidas é idêntica à relação esperada. Ou seja, os cilindros cheios têm o maior valor de aceleração, já que a sua massa está uniformemente distribuída em torno do eixo de rotação, o cilindro oco tem o menor valor de aceleração, pois a sua massa está toda concentrada no raio  $R$  do cilindro, e entre as duas encontra-se o anel grosso. Para além disso, os resultados da velocidade do cilindro cheio com grão (cheio1) são idênticos aos do cilindro cheio com arroz (cheio2), verificando assim que para a mesma distribuição espacial da massa em torno do eixo de rotação, os valores da velocidade são independentes da massa, pois  $m_{\text{cheio1}} < m_{\text{cheio2}}$ .

Outra experiência de especial interesse é verificar e comparar a influência de água líquida e de gelo dentro do cilindro enquanto este roda sobre o plano inclinado. Isto porque, enquanto no caso do cilindro cheio de gelo, este, em princípio, comportar-se-á como o cilindro cheio já estudado, no caso do cilindro cheio de água líquida (i.e. com



o mínimo de ar possível no seu interior), este poderá não ter o mesmo comportamento, dependendo da viscosidade da água e das interações entre a água líquida e a superfície cilíndrica interna que atrasam a sua rotação em relação à do recipiente.

Tendo em conta que o erro presente no gráfico da Fig. 3.21 é sistemático para todas as configurações, é bastante improvável que tal erro resulte do cálculo dos momentos de inércia e das medições envolvidas, já que estes variam para cada tipo de configuração e o erro é constante. Foi também verificado que o erro não resulta da má calibração ou funcionamento do giroscópio, pois a integração da velocidade linear a partir dos dados referentes à velocidade angular permite obter um valor coerente do deslocamento ao longo do plano inclinado (com um erro relativo inferior a 1 %).

Assim, e recorrendo à Eq. 3.43, o mais provável é o erro ter origem na medição do ângulo do plano inclinado. Para poder analisar os resultados desta última experiência corrigiu-se esse erro (constante para qualquer tipo de cilindro) no valor do ângulo medido. Os resultados desta experiência, com os valores teóricos ajustados a partir da anterior, estão representados na Fig. 3.22. Pela observação deste gráfico, verifica-se que a velocidade

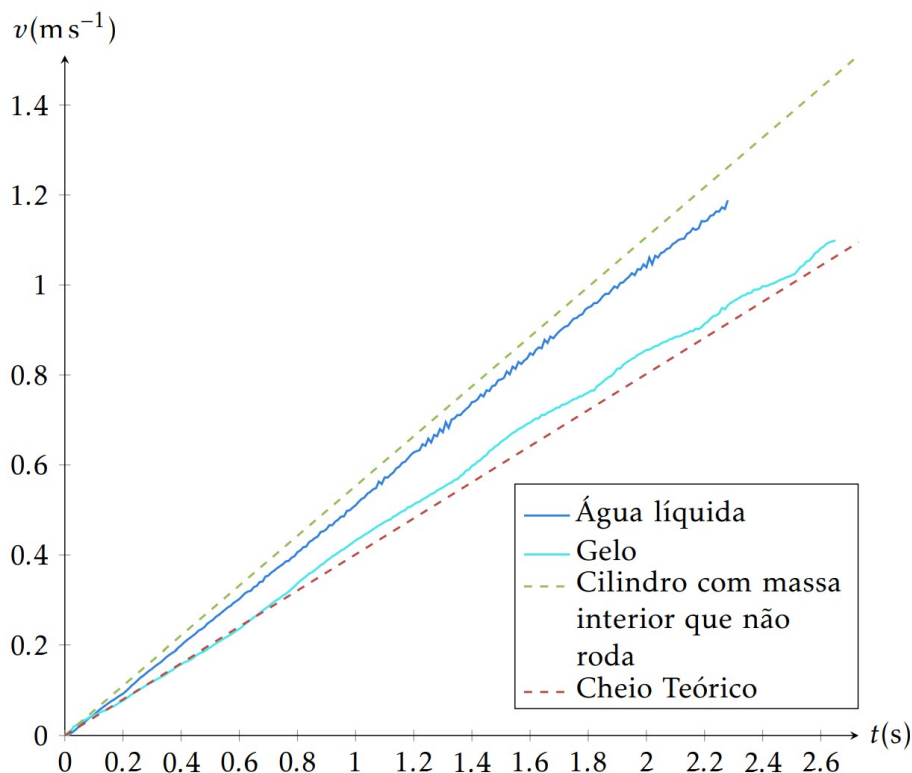


Figura 3.22: Velocidade de um cilindro cheio com água líquida e de um cilindro cheio com gelo.

do cilindro com gelo aproxima-se da velocidade de um cilindro cheio, como expectável. No entanto, a velocidade do cilindro com água líquida está bastante próxima da velocidade esperada para um cilindro cheio mas em que a única contribuição para o momento de inércia é a superfície do cilindro. Isto significa que tem o mesmo momento de inércia que o cilindro oco, já que a massa que tem no interior praticamente não roda devido à

reduzida viscosidade da água, não contribuindo assim para o momento de inércia. Recorrendo à Eq. 3.43, enquanto que o cilindro com gelo terá um coeficiente  $I/(MR^2)$  próximo de  $1/2$ , no caso do cilindro com água líquida, este coeficiente será igual a  $M_{\text{exterior}}/M_{\text{total}}$  que terá um valor mais próximo de zero, fazendo desta forma aumentar a aceleração.

### 3.3.4 Trabalho do Aluno

O aluno deve saber calcular (ou obter a partir de documentos não fornecidos) os momentos de inércia de cada cilindro que utilizar, de forma a comparar com os resultados obtidos. Estes resultados deverão ser obtidos através dos valores da velocidade angular adquiridos durante o ensaio. No caso de recorrer a diferentes configurações de cilindros, o aluno deverá comparar as velocidades em função do tempo entre todas as configurações e concluir que, caso a distribuição espacial da massa em torno do eixo de rotação seja igual, os valores de velocidade dessas configurações serão idênticos.

## 3.4 Solenóide Finito

Nesta secção é estudado o campo magnético criado por um solenóide, percorrido por uma corrente elétrica, ao longo do seu eixo, recorrendo para tal ao magnetómetro integrado no R-IoT. Para além de ser analisado o campo magnético em função da posição ao longo do eixo, é também verificada a influência do valor da corrente elétrica a percorrer o solenóide no valor do campo magnético no interior deste.

### 3.4.1 Introdução Teórica

Um solenóide é uma bobina obtida enrolando de forma helicoidal um fio condutor sobre um cilindro. Em geral, o seu comprimento é maior que o seu raio. De forma a obter um campo magnético no interior do solenóide é aplicada uma diferença de potencial às suas extremidades, de forma a fazer circular uma corrente elétrica neste. Partindo da análise a uma espira isolada (Fig. 3.23) percorrida por uma corrente  $I$ , é possível, recorrendo à lei de Biot-Savart, calcular o valor do campo magnético em qualquer ponto ao longo do seu eixo. Considere-se um ponto  $P$  a uma distância  $y$  do centro da espira.

O elemento de corrente  $Id\vec{l}$  originará em  $P$  um campo magnético  $d\vec{B}$  perpendicular a  $Id\vec{l}$  e a  $\vec{r}$ . Como  $Id\vec{l}$  e  $\vec{r}$  são sempre perpendiculares, tem-se:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + y^2)} \quad (3.45)$$

em que  $\phi$  é o ângulo formado entre  $Id\vec{l}$  e  $\vec{r}$ , tendo, nesta configuração, um valor de  $90^\circ$ .

Analisando agora o campo magnético  $d\vec{B}$ , criado por  $Id\vec{l}$  (ponto da espira oposto a  $Id\vec{l}$ ), verifica-se que este e  $d\vec{B}$  são simétricos em relação ao eixo da espira, resultando assim no anulamento das componentes perpendiculares a este eixo. Apenas a componente de  $\vec{B}$  no eixo  $y$  não é nula. Assim,

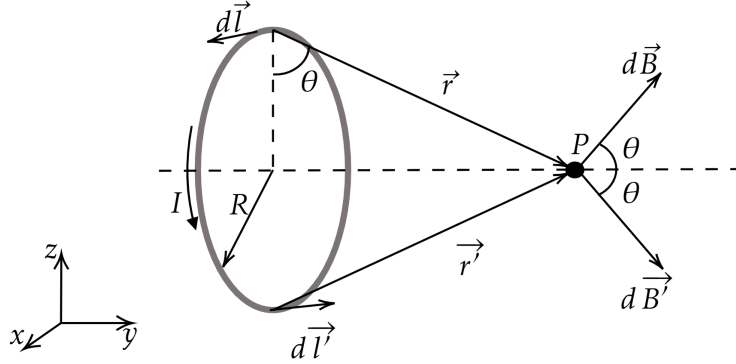


Figura 3.23: Campo magnético criado num ponto P por uma espira onde circula uma corrente I. A soma de todos os vetores de campo magnético criados nesse ponto terão apenas a direção de  $y$ , pois as restantes componentes anulam-se.

$$\vec{B} = \int_{\text{espira}} \cos \theta \, dB \, \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{espira}} \frac{\cos \theta \, dl}{R^2 + y^2} \vec{e}_y \quad (3.46)$$

Como para todos os elementos  $d\vec{l}$  os valores de  $R$  e  $y$  não variam, tem-se:

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} \quad (3.47)$$

Substituindo (3.47) em (3.46),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + y^2)^{3/2}} \int_{\text{espira}} dl \, \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_y \quad (3.48)$$

Assumindo que o solenóide é formado por  $N$  espiras paralelas entre si e equidistantes ao longo do eixo  $y$  num comprimento  $L$ , o número de espiras por unidade de comprimento num elemento infinitesimal de comprimento é  $\frac{N}{L} dy$ . Ao fazer circular uma corrente elétrica constante  $I$ , a corrente que passa pelo elemento infinitesimal  $dy$  será:

$$dI = \frac{NI}{L} dy \quad (3.49)$$

Na Fig. 3.24 está uma representação esquemática do solenóide visto de lado.

De modo a calcular o campo magnético criado num ponto P no eixo do solenóide recorre-se à Eq. 3.49 e à relação obtida na Eq. 3.48.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_y = \frac{\mu_0 R^2 NI}{2L} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_y \quad (3.50)$$

Para facilitar a integração da expressão anterior, recorre-se à mudança da variável independente de  $y$  para  $\theta$ . Tem-se portanto,

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \quad (3.51)$$

Derivando ambos os membros desta equação obtém-se:

$$\cos \theta \, d\theta = \left( -\frac{y^2}{(y^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right) dy = \frac{R^2 dy}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \quad (3.52)$$



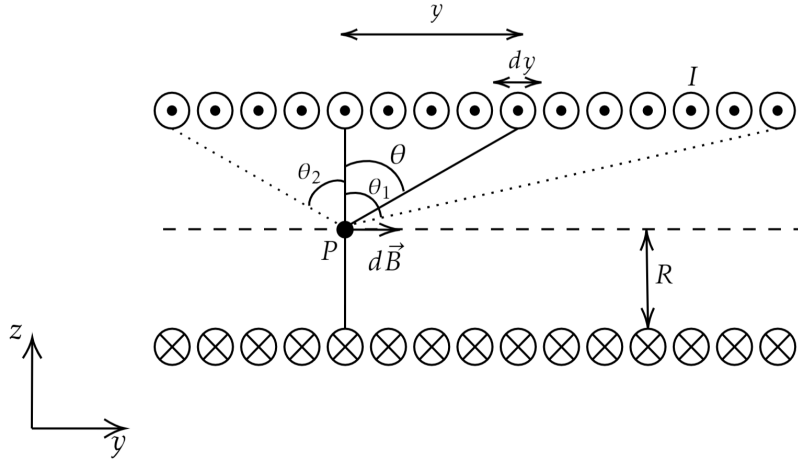


Figura 3.24: Solenóide criado por várias espiras de raio  $R$  próximas entre si. Este irá induzir um campo magnético no sentido positivo de  $y$  atendendo ao sentido da corrente elétrica. A representação do ângulo  $\theta$  será útil para a dedução do campo magnético total no ponto  $P$ .

Por último, substituindo (3.52) em (3.50) e integrando:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{e}_y \quad (3.53)$$

Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são referentes às duas extremidades do solenóide como está representado na Fig. 3.24. Note-se que  $\theta_1$  será sempre negativo dentro do solenóide e  $\theta_2$  sempre positivo. O gráfico obtido, através deste resultado, do campo magnético em função da posição segundo o eixo de um solenóide finito está representado na Fig. 3.25.

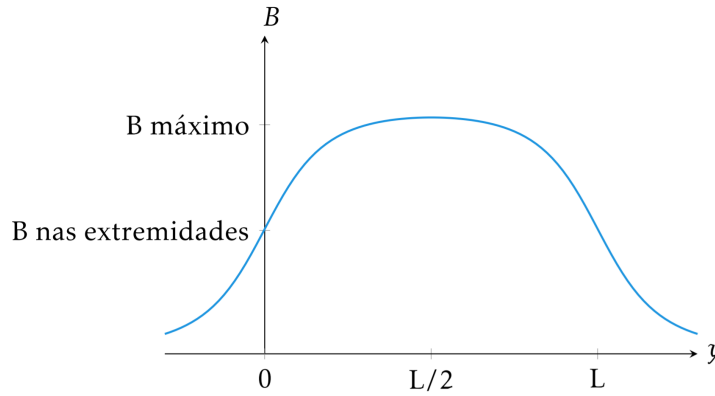


Figura 3.25: Valor teórico do campo magnético ao longo do eixo de um solenóide finito de comprimento  $L$ .

### 3.4.2 Procedimento Experimental

Para estudar o comportamento do campo magnético no interior de um solenóide finito, recorreu-se ao solenóide que está representado na Fig. 3.26. Este é constituído por 120 espiras enroladas helicoidalmente em torno de um cilindro de acrílico oco. As espiras têm uma distância de  $(3,5 \pm 0,5)$  mm entre si, exceto as duas espiras centrais, que

distam  $(6,0 \pm 0,5)$  mm uma da outra. O comprimento do solenóide é  $(40,60 \pm 0,05)$  cm e o diâmetro  $(12,00 \pm 0,05)$  cm.

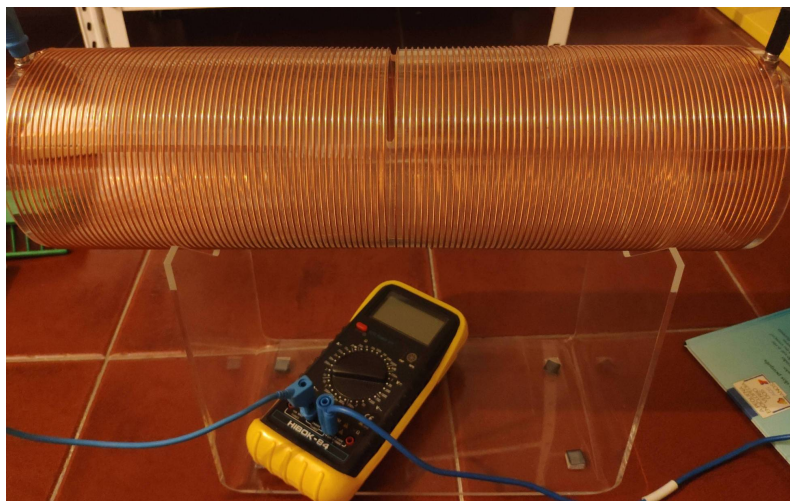
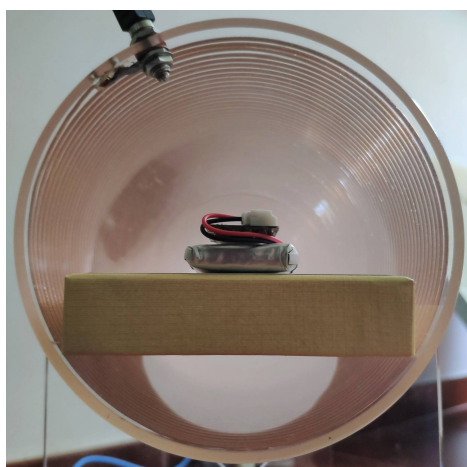
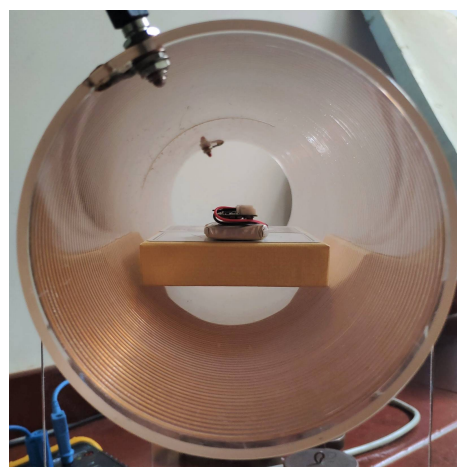


Figura 3.26: Fotografia do solenóide usado na experiência. Em baixo está ligado um multímetro com o objetivo de medir a corrente elétrica a circular nas espiras.

De modo a obter um campo magnético no seu interior, foi ligada às extremidades do solenóide uma fonte de corrente elétrica com um amperímetro ligado em série, para deste modo confirmar o valor da corrente fornecida pela fonte. Para adquirir os valores do campo magnético ao longo do seu eixo central, colocou-se o R-IoT numa extremidade do solenóide em cima de um suporte que lhe permitisse ficar no centro da circunferência dessa extremidade (Fig. 3.27a). Ao iniciar a gravação, esse suporte foi movido ao longo do eixo (Fig. 3.27b) de 5 cm em 5 cm parando por um curto período de tempo (cerca de 7 s) em cada uma dessas posições de forma a ser possível pelo programa calcular uma média de campo magnético para cada posição.



(a)



(b)

Figura 3.27: Fotografias do R-IoT em cima de um suporte de cartão movido ao longo do eixo do solenóide.

Após gravar o ficheiro, e recorrendo à secção “SOLENOID” do *plugin*, foram escolhidos os parâmetros para a análise dos dados gravados. Como pode ser visto na Fig. 3.28, o utilizador deverá escolher o eixo coordenado do R-IoT e alterar, caso seja necessário, os parâmetros *Threshold* (que indica o limite superior da taxa de variação do campo magnético para uma posição constante, i.e. se este valor for muito elevado não haverá distinção entre dois “patamares” com valores de campo diferentes, se for muito reduzido haverá mais “patamares” do que na realidade) e *Window* (que se relaciona com o tempo que o sensor esteve parado em cada posição e da velocidade com que transitou de posição). Para ajustar estes dois parâmetros, o utilizador deverá adotar uma estratégia de tentativa e erro até obter o resultado desejado, já que estes valores originarão resultados diferentes consoante a amostra em análise. Opcionalmente, poderá inserir diretamente os valores  $x$  da distância à posição inicial (caso não insira, a respetiva coluna da folha de cálculo ficará vazia, tendo o utilizador que inserir posteriormente os valores nessa coluna). Os parâmetros *Threshold* e *Window* têm como objetivo facilitar o trabalho do utilizador, pois vão permitir calcular automaticamente os diferentes níveis de campo magnético para cada posição e fazer uma média de cada um desses níveis. Após carregar em “PROCESS”, além de ser extraído um ficheiro em formato *.xlsx* com uma coluna referente à posição e outra que contém a média de cada “patamar” do campo magnético, aparecerá também na secção do *plugin* um gráfico onde foi aplicado um filtro de média móvel aos dados com base nos parâmetros inseridos.

Foram gravados três ficheiros desta forma, em que se variou a corrente elétrica a circular no solenóide. A análise destes dados está presente na próxima subsecção.

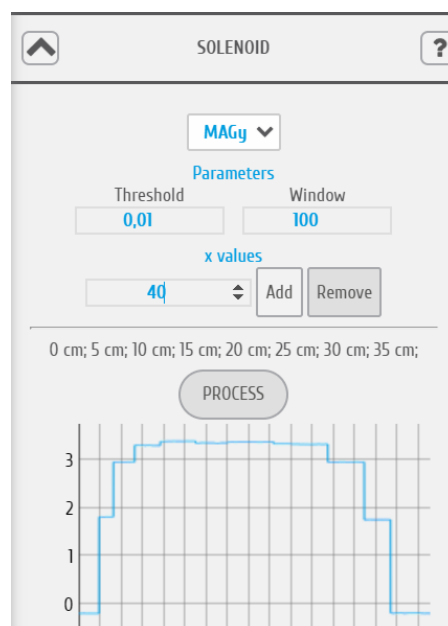


Figura 3.28: Secção do *plugin* direccionada à experiência do solenóide.

### 3.4.3 Resultados

A partir dos dados exportados pelo *plugin*, criou-se um gráfico com os valores do campo magnético em função da distância ao longo do solenóide para três valores de corrente diferentes, 0,50 A, 0,75 A e 1,00 A. Este gráfico está representado na Fig. 3.29 sendo possível observar a existência de uma diminuição no valor do campo magnético na zona central do solenóide. Esta diminuição não está de acordo com os resultados teóricos obtidos na Subsecção 3.4.1, mas, lembrando as características físicas do solenóide em estudo (Fig. 3.26), este possui no centro um espaçamento entre as duas espiras maior do que nas restantes espiras. Assim, adotando uma abordagem diferente, pode-se assumir que existem dois solenóides com 20 cm cada e distanciados de 0,6 cm.

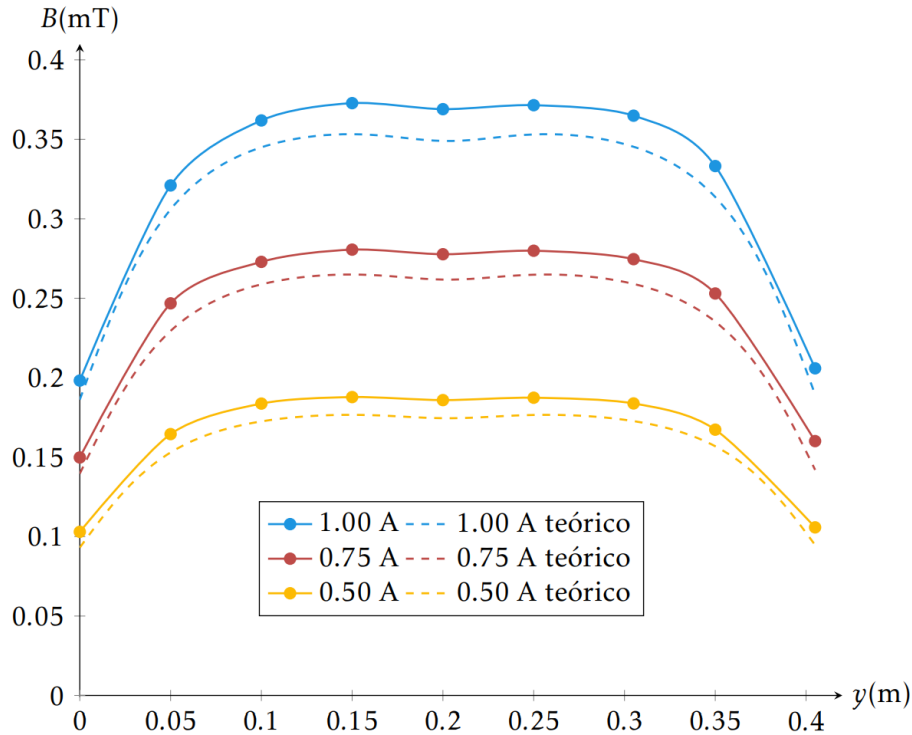


Figura 3.29: Valores dos campos magnéticos ao longo do eixo do solenóide em função da distância à extremidade deste, obtidos para três valores diferentes de corrente elétrica no solenóide. As linhas contínuas que unem os pontos são apenas guias de observação. A tracejado estão representadas as curvas teóricas para cada valor de corrente elétrica calculadas a partir de 3.53 e assumindo que existem dois solenóides finitos.

Recorrendo à Eq. 3.53 para cada solenóide, e com a ajuda da representação esquemática presente na Fig. 3.30, onde cada retângulo é um solenóide, obtém-se, somando os campos criados por ambos os solenóides, a seguinte expressão para o valor absoluto do

campo magnético total no eixo do cilindro:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 IN}{2L} [(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + (\sin \theta_4 - \sin \theta_3)] \\
 &= \frac{\mu_0 IN}{2L} \left[ \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + r^2}} + \frac{l-y}{\sqrt{(l-y)^2 + r^2}} \right) + \left( \frac{y-(l+d)}{\sqrt{(y-(l+d))^2 + r^2}} + \frac{l-(y-(l+d))}{\sqrt{(l-(y-(l+d)))^2 + r^2}} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (3.54)$$

em que  $d$  representa a distância entre os dois solenóides,  $l$  o comprimento de cada solenóide e  $r$  o raio destes.

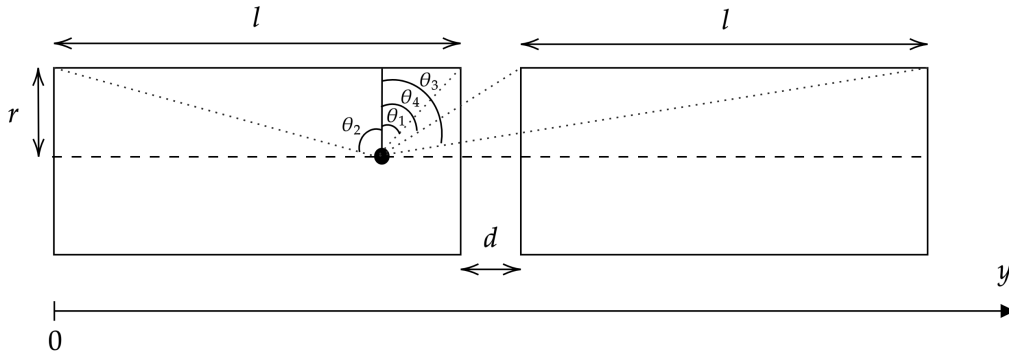


Figura 3.30: Representação esquemática dos dois solenóides de comprimento  $l$  e raio  $r$  a uma distância  $d$ .

A representação gráfica do resultado obtido na Eq. 3.54 (valor do campo magnético total criado pelos dois solenóides em função da distância ao longo do eixo central) está presente na Fig. 3.31. Nesta é possível também ver a tracejado os campos magnéticos

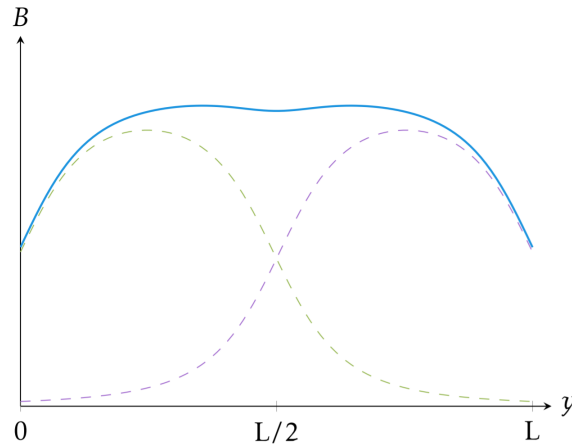


Figura 3.31: Valor do campo magnético teórico em função da posição ao longo do eixo do solenóide assumindo que este é formado por dois solenóides separados com metade do comprimento. Em  $L/2$  existe uma diminuição no valor de  $B$  resultante dessa separação.

criados por cada solenóide, dando origem ao campo total em função da distância à extremidade. Note-se que surge uma diminuição no campo magnético em  $L/2$ , coincidindo assim com os resultados experimentais.

Desta forma, foram calculados os valores do campo magnético teórico para cada valor de corrente elétrica, sendo estes representados também no gráfico da Fig. 3.29 a tracejado. É notório o erro relativo existente entre cada par de curvas, estando este quantificado na Fig. 3.32. Apesar disso, a curva teórica dada pela Eq. 3.54 descreve bem a ligeira diminuição do campo magnético no centro do solenóide devido ao espaçamento entre as duas espiras centrais ser 6 mm em vez dos 3,5 mm das restantes espiras. Verifica-se também que o erro relativo do campo magnético tem um valor médio próximo de 6 % independentemente do valor da corrente elétrica e da posição ao longo do solenóide (excetuando os dois extremos que apresentam erros ligeiramente mais elevados, isto porque, provavelmente, o campo ao variar mais rapidamente com a distância nos extremos do solenóide (Fig. 3.31) um pequeno desvio na medição da distância originará um erro significativo). Não é evidente a origem deste erro constante, mas a calibração do magnetómetro ou o valor medido da corrente elétrica podem ser as causas mais prováveis (para o caso da corrente, um decréscimo de 5 % no valor medido, ou seja, na ordem das dezenas de mA, faria com que os resultados coincidissem com o esperado).

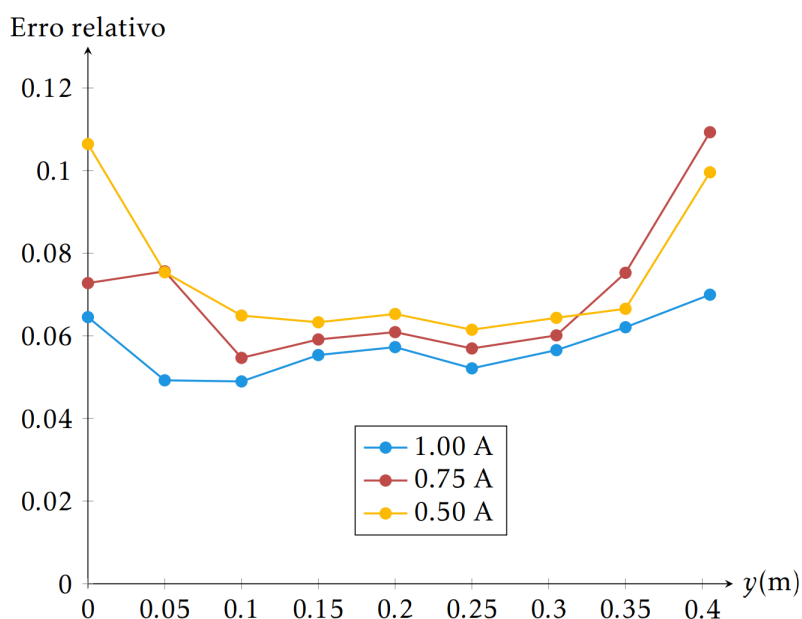


Figura 3.32: Erro relativo do valor do campo magnético em função da distância ao longo do eixo do solenóide para os três valores de corrente usados.

#### 3.4.4 Trabalho do Aluno

O aluno deverá nesta experiência relacionar o campo magnético dentro de um solenóide com a corrente elétrica no circuito e com a posição ao longo do eixo central deste. A partir das características físicas do solenóide usado, i.e. número de espiras, comprimento, raio e equidistância das espiras, e recorrendo à Eq. 3.53, o aluno deverá obter o valor teórico do campo magnético em função da distância a uma das extremidades do solenóide. Poderá, depois de gravar um ou mais ficheiro em que variou a posição do R-IoT ao longo

do solenóide ou a corrente elétrica, comparar os valores obtidos do campo magnético já calibrados com os valores obtidos teoricamente. Adicionalmente, o aluno poderá também medir o campo magnético fora do solenóide (ao longo do seu eixo) de modo a verificar uma diminuição deste em  $\frac{1}{y^3}$  (típica do campo criado por um dipolo magnético), embora possa ser mais vantajoso recorrer a um anel com muitas espiras, já que assim o campo não será tão fraco como no exterior do solenóide.

## 3.5 Lei dos Gases Ideais

O principal objetivo nesta secção é observar a relação existente entre a pressão e a temperatura de um gás próximo das condições ideais de pressão e temperatura, e com volume e quantidade de matéria constantes. São para isso analisados três ensaios com condições iniciais de temperatura e pressão diferentes, pretendendo, desta forma, verificar se a relação entre a pressão e a temperatura é invariável, independentemente das condições iniciais, e como esta relação se compara com a dos gases ideais ( $PV = Nk_B T$ ).

### 3.5.1 Introdução Teórica

Qualquer gás nas condições de temperatura e pressão necessárias para que as colisões entre todas as partículas desse gás possam ser consideradas perfeitamente elásticas, e que as forças moleculares possam ser desprezadas em relação à energia cinética, chama-se gás ideal. Para tal, a temperatura não poderá ser demasiado baixa e a pressão não poderá ser demasiado alta. Nas condições normais de pressão e temperatura (PTN), a maioria dos gases simples (gases raros, gases diatômicos, etc.) têm um comportamento muito próximo do gás ideal.

A vantagem de considerar o modelo de gás ideal é que se obtém uma equação de estado bastante simples, chamada lei dos gases ideais, e que se pode escrever da seguinte forma:

$$PV = Nk_B T \quad (3.55)$$

onde  $P$  é a pressão do gás,  $V$  o volume ocupado por este,  $N$  o número total de partículas no volume  $V$ ,  $k_B$  a constante de Boltzmann ( $k_B = 1,380\,649 \times 10^{-23}$  J/K [29]) e  $T$  a temperatura absoluta do gás.

Mantendo o volume e a quantidade de matéria constantes, obtém-se uma relação proporcional entre a pressão e a temperatura do gás. Ao criar um gráfico da pressão em função da temperatura, obter-se-á uma reta com declive igual a  $\frac{Nk_B}{V}$ . O quociente entre o número de partículas num gás e o volume ocupado por este é característico de cada substância a pressão e temperatura definidas. Por exemplo, para o ar seco a 20 °C e a 1 atm a densidade de partículas por unidade de volume vale  $2,504 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Assim, definido



um volume constante com ar seco no interior, o declive da reta  $P(T)$  será igual a

$$\begin{aligned}\frac{P}{T} &= k_B \times 2,504 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} \\ &= 1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J/K} \times 2,504 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} \\ &= 345,715 \text{ Pa/K}\end{aligned}\tag{3.56}$$

### 3.5.2 Procedimento Experimental

De modo a verificar a relação na Eq. 3.56, realizou-se uma experiência em que o R-IoT, com o sensor de pressão mencionado na Subsecção 2.3.4 ligado a uma das entradas analógicas, foi inserido num recipiente térmico de cerca de 150 mL e colocado bem fechado dentro de um congelador a aproximadamente  $-18^\circ\text{C}$  de modo que o ar presente no interior do recipiente arrefecesse lentamente. Foi utilizado um recipiente deste género pois com outros tipos de recipientes, de vidro ou *tupperwares*, verificou-se que o valor lido pelo sensor de pressão variava mais rapidamente que os valores da temperatura medidos pelo R-IoT, consequência da inércia térmica. Com um recipiente mais isolado termicamente, a temperatura no interior, e consequentemente a pressão, variariam mais lentamente, permitindo assim o equilíbrio entre a temperatura do gás e a do R-IoT.

De entre vários ensaios realizados, serão na próxima subsecção analisados três deles. Já que nesta experiência é o utilizador que realiza a calibração à parte (como referido na Subsecção 2.3.4) e os dados são os medidos diretamente, não houve necessidade de criar uma secção própria no *plugin* para esta experiência. Foi no entanto criada uma secção “CUSTOM” (ver Fig. 3.33) com o objetivo de permitir que o utilizador escolha apenas os sensores a partir dos quais pretende obter os valores e a frequência de amostragem  $f$ . Esta última será utilizada para apresentar os dados em intervalos de  $\frac{100\text{Hz}}{f}$ , onde apenas

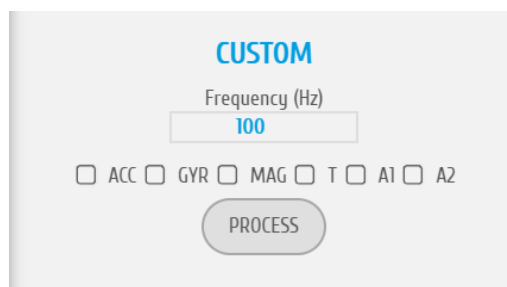


Figura 3.33: Secção “CUSTOM” do *plugin* “EXPERIMENTAL PHYSICS”.

aparecerá o primeiro valor de cada intervalo. Se  $f = 100\text{Hz}$ , a frequência de amostragem é a mesma que a original; se  $f = 50\text{Hz}$ , obtém-se valores em intervalos de 2, resultando assim numa redução dos dados para metade. A forma mais correta seria fazer a média entre cada intervalo (no caso de  $f = 50\text{Hz}$ , entre cada par de valores), mas verificou-se que este procedimento não era viável relativamente ao tempo exigido para a sua operação. Para esta experiência em específico, a opção de inserir a frequência é bastante útil já que o tempo de aquisição será consideravelmente grande (pelo menos 20 min) e a frequência



predefinida para a aquisição de dados do módulo R-IoT no *OpenSignals* é de 100 Hz. Ao escolher a temperatura e o sensor analógico, e inserindo a frequência desejada, o utilizador deverá carregar em “PROCESS” para que seja extraído um ficheiro *.xlsx* com as colunas dos sensores correspondentes.

Ao adquirir o sinal da temperatura imediatamente após ligar o R-IoT, verificou-se que este originava um auto-aquecimento que era registado no sinal, aumentando o seu valor em cerca de 10 °C. Verificou-se também que este aumento de temperatura não variava com a temperatura inicial do R-IoT, resultando por isso apenas num *offset* de temperatura, e não influenciando consequentemente o resultado do declive do gráfico obtido da pressão em função da temperatura. De qualquer forma, será mais vantajoso no futuro recorrer a um sensor de temperatura externo (i.e. que meça diretamente a temperatura a que está o gás e não a temperatura interna do R-IoT), conectando-o à outra entrada analógica do R-IoT, para desta forma garantir resultados de temperatura mais coerentes.

### 3.5.3 Resultados

Como referido na subsecção anterior, serão analisados três ensaios relativos a esta experiência, em que num deles o recipiente, previamente arrefecido sem a tampa, foi aquecido já com tampa e com o R-IoT no seu interior (curva a amarelo na Fig. 3.34) e nos restantes dois o recipiente com o R-IoT no seu interior foi colocado no congelador com temperaturas e pressões iniciais diferentes (curvas a azul e a vermelho na Fig. 3.34). Apesar de em dois dos três ensaios o R-IoT ter sido colocado num congelador com temperatura de cerca de -18 °C, estes valores não estão presentes nos gráficos, já que, antes de atingir esta temperatura, a bateria do R-IoT deixava de funcionar corretamente, alterando significativamente o valor do sinal obtido. Para além disso, é notório o intenso ruído presente nas três curvas da Fig. 3.34b e, consequentemente, da Fig. 3.34c. Foi analisada a origem deste ruído e concluiu-se que este era, provavelmente, proveniente do processamento do sinal obtido pelo sensor de pressão na placa do R-IoT durante a conversão para sinal digital, já que foi verificado que o sinal proveniente diretamente do sensor (sem estar conectado ao R-IoT) não apresentava qualquer anomalia quando lido num dos osciloscópios presentes num dos laboratórios do Departamento de Física da FCT-UNL.

Na Fig. 3.34c estão representados os valores de pressão já calibrados (ver Subsecção 2.3.4) em função da temperatura em graus Celsius. É bem visível a tendência linear das três funções. As retas de ajuste foram calculadas a partir do método dos mínimos quadrados e os resultados estão na legenda da mesma figura. Comparando cada declive com o valor esperado obtém-se:

$$\frac{\Delta\left(\frac{dP_1}{dT_1}\right)}{\frac{dP}{dT}} = \frac{352,91 - 345,72}{345,72} = 2,1\% \quad (3.57)$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{dP_2}{dT_2}\right)}{\frac{dP}{dT}} = \frac{329,55 - 345,72}{345,72} = -4,7\% \quad (3.58)$$

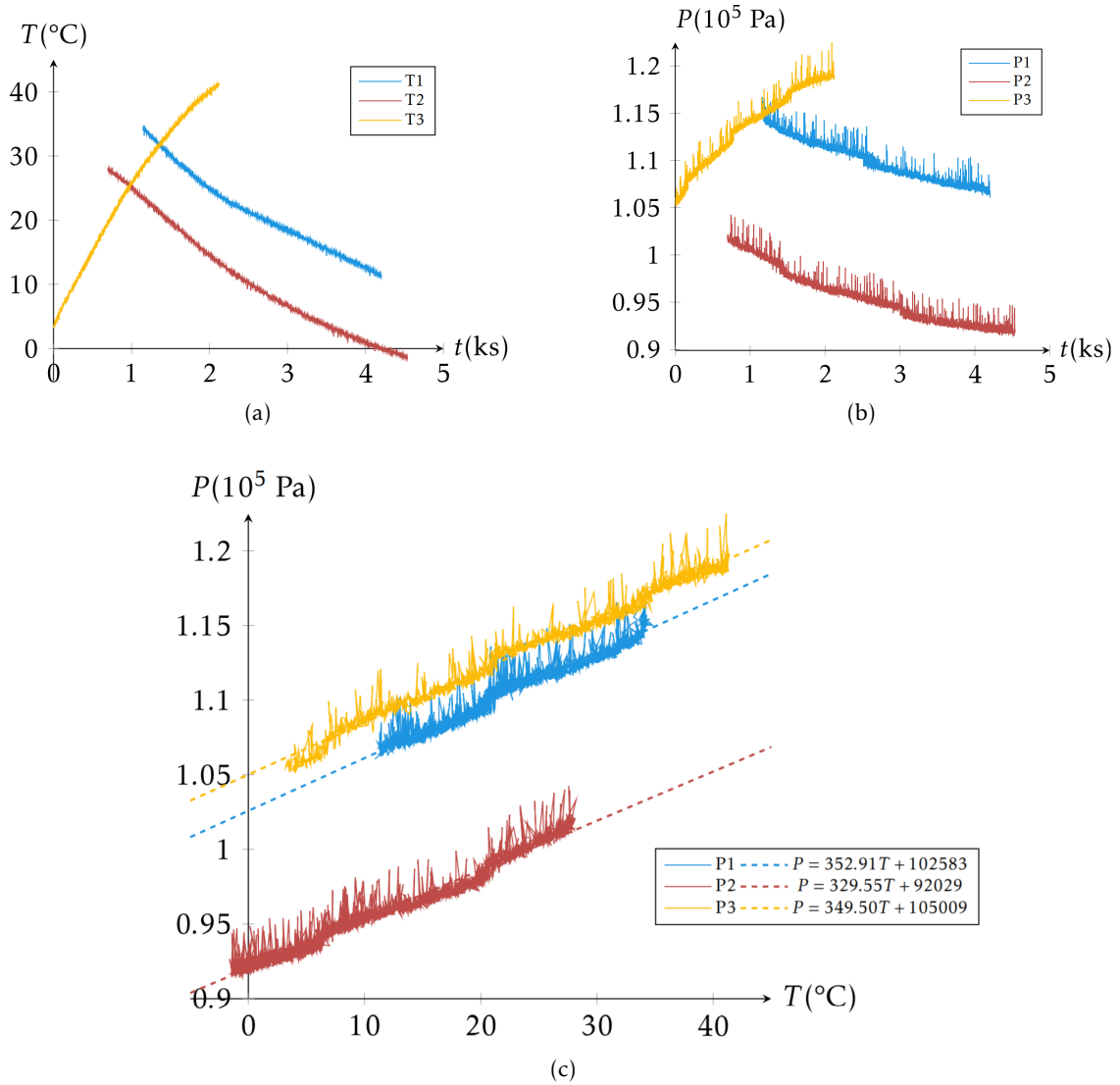


Figura 3.34: Resultados da lei dos gases ideais: (a) Variação da temperatura; (b) Variação da pressão; (c) Pressão em função da temperatura.

$$\frac{\Delta\left(\frac{dP_3}{dT_3}\right)}{\frac{dP}{dT}} = \frac{349,50 - 345,72}{345,72} = 1,1\% \quad (3.59)$$

Para os três casos verifica-se que o módulo do erro relativo é inferior a 5 %, pelo que, face às limitações dos dois sensores envolvidos da experiência, são no geral resultados aceitáveis. Note-se igualmente que o valor do declive das retas obtidas no gráfico da pressão em função da temperatura é independente das condições iniciais de pressão e temperatura. As medidas feitas no fim deste trabalho permitiram concluir que a leitura do sensor de pressão pelo R-IoT é imperfeita (ver também por exemplo a Fig. 2.9). A resolução deste problema poderá provavelmente melhorar estas medidas.

#### 3.5.4 Trabalho do Aluno

Para realizar esta experiência, o aluno deverá ter um sensor de pressão com saída analógica que possa conectar ao R-IoT e um recipiente bem vedado, com trocas reduzidas de calor entre o interior e o exterior (por exemplo um recipiente térmico para alimentos). Deverá depois adquirir o sinal do sensor de pressão e do sensor de temperatura para vários ensaios em que o recipiente é aquecido e arrefecido. Após calibrar os valores de pressão obtidos para cada ensaio, o aluno deverá criar os gráficos de pressão em função da temperatura de modo a verificar a proporcionalidade entre ambas. Por último deverá ser calculado esse declive para cada ensaio e compará-lo ao valor esperado (Eq. 3.56).



## CONCLUSÃO

### 4.1 Considerações Finais

Tendo como objetivo verificar a viabilidade da utilização do sistema BITalino R-IoT na realização de experiências didáticas em diferentes áreas da Física Clássica, foram realizadas cinco experiências nas quais se integrou este dispositivo, de forma a avaliar os resultados obtidos a partir dos seus sensores ou, em uma das experiências, a partir de sensores externos a este, e a compará-los aos valores teóricos.

Na experiência da queda livre (Secção 3.1), os resultados obtidos através do acelerómetro do R-IoT permitiram verificar de forma bastante precisa o comportamento do valor da aceleração do corpo em queda, validando desta forma os resultados teóricos obtidos nessa secção e, complementarmente, constatando a influência da forma do corpo na evolução temporal da aceleração.

Na Secção 3.2, ao analisar as colisões de duas bolas com características diferentes, foi possível apenas com o sinal do acelerómetro do R-IoT na superfície de colisão obter uma estimativa para o coeficiente de restituição de cada bola, bem como para o valor da aceleração gravítica, esta com um erro relativo bastante reduzido.

Ao estudar o movimento de vários cilindros ao longo de um plano inclinado, na Secção 3.3, embora os resultados apresentem um erro sistemático cuja origem não foi detetada, verificou-se ainda assim, recorrendo ao sensor do giroscópio do R-IoT, o efeito do momento de inércia dos vários cilindros na sua rotação, e consequente deslocamento, ao longo do plano inclinado.

Estudou-se também, na Secção 3.4, o comportamento do campo magnético criado por um solenóide no interior deste, onde se obtiveram, recorrendo ao magnetómetro do R-IoT, resultados próximos dos valores esperados.

Finalmente, na Secção 3.5, obtiveram-se resultados satisfatórios face às limitações

tanto do sensor de temperatura (sensor que media a temperatura interna do R-IoT e não a exterior) como do sensor de pressão (sensor com elevado ruído tendo em conta as especificações).

A realização das experiências apresentadas e respetiva análise permitiram concluir que a utilização do modelo R-IoT na área da educação científica de Física Experimental é, para além de viável, bastante vantajosa, fruto da sua versatilidade, das suas reduzidas dimensões e do recurso à comunicação por *Wi-Fi*, mostrando, desta forma, o bom potencial da sua utilização nesta área.

## 4.2 Trabalho Futuro

Relativamente ao estudo da queda livre (Secção 3.1) e com o objetivo de alcançar uma maior estabilidade no movimento do corpo em queda livre, de forma a diminuir o ruído apresentado mormente na fase final, seria adequado a concepção de um objeto que apresentasse um coeficiente de arrasto e uma área transversal ao fluxo adequados à obtenção de um valor de velocidade limite reduzido, e, simultaneamente, de modo a que a sua configuração permitisse menos oscilações no movimento da queda livre. De modo idêntico ao procedimento realizado na experiência do campo magnético criado por um solenóide (Secção 3.4), poder-se-á estudar o campo magnético criado por outros tipos de espiras, como, por exemplo, a bobina de Helmholtz. No estudo dos gases ideais, será útil recorrer a um sensor de temperatura externo, já que o sinal adquirido corresponderá dessa forma à temperatura do gás e não à do R-IoT, produzindo resultados mais coerentes. Será também preciso caracterizar em maior detalhe o problema que origina o ruído no sinal das entradas analógicas (como se verificou no sinal da pressão da Secção 3.5).

Tendo em conta que, como foi concluído, é possível a realização de experiências didáticas de Física recorrendo ao BITalino R-IoT, é importante considerar a criação de um pacote com um conceito *do it yourself* onde esteja incluído o R-IoT e, como exemplo, um cilindro que seja objeto de estudo da experiência do plano inclinado, um fio de cobre que pode ser enrolado no próprio cilindro de forma a que o aluno possa criar um solenóide e uma esponja de proteção para inserir o R-IoT (necessária para realizar experiência de queda livre). Ao utilizar um pacote deste tipo, é possível estudar uma grande variedade de experiências na área da Física Clássica, podendo, deste modo, ser útil inclusive na componente experimental de uma cadeira introdutória de Física de cursos de outras áreas científicas.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] K. Havlíček. “Experiments in Physics Education : What do Students Remember?” Em: *WDS’15 Proceedings of Contributed Papers — Physics*. 2015, pp. 144–148. ISBN: 978-80-7378-311-2.
- [2] C. Wieman e N. Holmes. “Measuring the impact of introductory physics labs on learning and critical thinking”. Em: dez. de 2015, pp. 363–366. DOI: [10.1119/perc.2015.pr.086](https://doi.org/10.1119/perc.2015.pr.086).
- [3] S. Gerstner e F. Bogner. “Cognitive Achievement and Motivation in Hands-on and Teacher-Centred Science Classes: Does an additional hands-on consolidation phase (concept mapping) optimise cognitive learning at work stations?” Em: *International Journal of Science Education* 32.7 (mai. de 2010), pp. 849–870. DOI: [10.1080/09500690902803604](https://doi.org/10.1080/09500690902803604).
- [4] J. Alho. “Development of Didactic Physics Experiments using a Miniaturized Wireless Acquisition Board”. Tese de mestrado. Portugal: Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [5] J. Alho, H. Plácido da Silva, V. Teodoro e G. Bonfait. “A Simple Pendulum Studied with a Low-cost Wireless Acquisition Board”. Em: *Physics Education* 54 (nov. de 2018), pp. 1–12. DOI: [10.1088/1361-6552/aaea9d](https://doi.org/10.1088/1361-6552/aaea9d).
- [6] *BITalino (r)evolution Plugged Kit BT*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. URL: <https://bitalino.com/products/plugged-kit-bt> (acedido em 23/11/2020).
- [7] H. P. da Silva, A. L. N. Fred e R. Martins. “Biosignals for Everyone”. Em: *IEEE Pervasive Comput.* 13.4 (2014), pp. 64–71. DOI: [10.1109/MPRV.2014.61](https://doi.org/10.1109/MPRV.2014.61). URL: <https://doi.org/10.1109/MPRV.2014.61>.
- [8] *BITalino R-IoT*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. URL: <https://bitalino.com/products/r-iot-2> (acedido em 23/11/2020).
- [9] *Wireless Smart Cart*. PASCO. URL: <https://www.pasco.com/products/smart-cart> (acedido em 29/11/2020).
- [10] *PocketLab*. Myriad Sensors. URL: <https://www.thepocketlab.com> (acedido em 25/11/2020).
- [11] *PocketLab Voyager*. URL: <https://www.thepocketlab.com/store/pocketlab-voyager> (acedido em 23/11/2020).

- [12] *R-IoT*. IRCAM. URL: <http://ismm.ircam.fr/riot/> (acedido em 28/11/2020).
- [13] *BITalino (r)evolution Board Kit BT*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. URL: <https://bitalino.com/products/board-kit-bt> (acedido em 28/11/2020).
- [14] *Moeda corrente - Euro*. Imprensa Nacional Casa da Moeda. URL: [https://www.incm.pt/portal/mpm\\_euro.jsp](https://www.incm.pt/portal/mpm_euro.jsp) (acedido em 23/11/2020).
- [15] *iNEMO inertial module: 3D accelerometer, 3D gyroscope, 3D magnetometer*. LSM9DS1. Rev. 3. STMicroelectronics. Mar. de 2015. URL: <https://www.st.com/resource/en/datasheet/lsm9ds1.pdf> (acedido em 25/11/2020).
- [16] *BITalino R-IoT User Manual*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. 2020. URL: <https://bitalino.com/storage/uploads/media/manual-riot-v12.pdf> (acedido em 23/11/2020).
- [17] *BITalino R-IoT Quick Start Guide*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. Set. de 2018. URL: <https://bitalino.com/storage/uploads/media/r-iot-configuration-guide.pdf> (acedido em 23/11/2020).
- [18] *BITalino R-IoT Data Sheet*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. 2020. URL: <https://bitalino.com/storage/uploads/media/datasheet-r-iot---v11-1-1.pdf> (acedido em 23/11/2020).
- [19] *OpenSignals (r)evolution*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. URL: <https://bitalino.com/downloads/software> (acedido em 23/11/2020).
- [20] *How to Create your Own OpenSignals Plugin*. PLUX – Wireless Biosignals, S.A. 2019. URL: <http://www.downloads.plux.info/OpenSignals/OpenSignalsPluginCreation-QuickStartGuide.pdf> (acedido em 25/11/2020).
- [21] *BioSPPy - biosppy.signals.tools*. Instituto de Telecomunicações. URL: <https://biosppy.readthedocs.io/en/stable/biosppy.signals.html#biosppy-signals-tools> (acedido em 29/11/2020).
- [22] K. Winer. *Simple and Effective Magnetometer Calibration*. Set. de 2017. URL: <https://github.com/kriswiner/MPU6050/wiki/Simple-and-Effective-Magnetometer-Calibration> (acedido em 25/11/2020).
- [23] *Magnetic Field Estimated Values*. URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/calculators/magcalc.shtml#igrfwmm> (acedido em 25/11/2020).
- [24] *TruStability® Board Mount Pressure Sensors*. HSC Series—High Accuracy, Compensated/Amplified. HONEYWELL INTERNATIONAL INC. 2014. URL: <https://sensing.honeywell.com/honeywell-sensing-trustability-hsc-series-high-accuracy-board-mount-pressure-sensors-50099148-a-en.pdf> (acedido em 25/11/2020).
- [25] S. J. Ling, J. Sanny e W. Moebs. *University physics*. OpenStax, Rice University, 2016, pp. 302–305. ISBN: 1-947172-20-4.



- [26] S. F. Hoerner. “Drag of wedges and cones”. Em: *Fluid-dynamic drag*. 2<sup>a</sup> ed. 1965. Cap. 3.
- [27] C. Aguiar e F. Laudaes. “Listening to the coefficient of restitution and the gravitational acceleration of a bouncing ball”. Em: *American Journal of Physics* 71.5 (2003), pp. 499–501. DOI: [10.1119/1.1524166](https://doi.org/10.1119/1.1524166).
- [28] N. Huggett. “Zeno’s Paradoxes”. Em: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por E. N. Zalta. Winter 2019. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/paradox-zeno/> (acedido em 22/11/2020).
- [29] BIPM. *Le Système international d’unités / The International System of Units* (‘The SI Brochure’). 9<sup>a</sup> ed. Bureau international des poids et mesures, 2019. ISBN: 978-92-822-2272-0. URL: [http://www.bipm.org/en/si/si\\_brochure/](http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/) (acedido em 25/11/2020).

